Halvsyntaktiske modeller og deontisk logikk

Morten Rognes

1971

(Bearbeidet og renskrevet høsten 2008)

© Morten Harboe Rognes 2008

§1 Innledning

Dette arbeidet er en videreføring av Rognes [1]. I Rognes [1] innførte vi begrepet halvsyntaktisk modell og viste hvordan det kunne anvendes ved de klassiske modalsystemene T,B,S4 og S5. I dette arbeidet gjør vi et forsøk på å anvende begrepet ved analysen av noen deontiske logikker. Det dreier seg om seks systemer som tidligere har vært beskrevet og undersøkt av William H. Hanson i Hanson [1]. [1]

Systemene det dreier seg om er for det første det minimale system F. Det kan diskuteres om dette kan kalles en deontisk logikk. Dessuten dreier det seg om systemene D, DM, DB, DS4 og DS5. De fire siste systemene svarer, som man gjetter fra navnene, til de velkjente systemene T, B,S4 og S5.

Det må medgis at dette arbeidet er av en rent teknisk natur. Vi går ikke inn på spørsmål som har med den moralfilosofiske relevans som disse systemene kan ha, om de overhodet har noen.[2]

La oss gi en oversikt over innholdet. I §2 - § 4 gjør vi rede for de grunnleggende begrepene vi trenger. §1 gis en beskrivelse av den type setningslogiske språk vi arbeider med. Vi formulerer her det systemet for setningslogikk som er inkludert i alle de modallogiske systemene vi undersøker, og avgrenser syntaktisk mengden av alle de rent setningslogiske formler som er gyldige i språket L. I §3 innfører vi begrepet halvsyntaktisk modell. Begrepet defineres presist og vi viser at alle de setningslogisk gyldige formlene holder i enhver halvsyntaktisk modell. I §3.1 presenteres en alternativ, men ekvivalent, definisjon av dette modellbegrepet.

En vesentlig del av dette arbeidet består i å bevise forskjellige fullstendighetsresultater for de kalkylene vi undersøker. I §4 gjør vi rede for hva som menes med at en formelmengde Δ er *konsistent* og *maksimalt konsistent* med hensyn på et system S av den type vi arbeider med her. I tillegg formulerer vi Lindenbaums sats som sier at enhver S-konsistent mengde kan utvides til en S-maksimalt konsistent mengde. Dessuten formulerer vi en ganske omfangsrik sats om S-maksimalt konsistente mengder. Disse satser brukes i alle de fullstendighetsbevisene vi gir. Det bør nevnes at §2 - §4 er nesten ordrett identiske med de tilsvarende avsnitt i
Rognes [1].

I §5 - §10 går vi detaljert i gjennom de systemene vi har nevnt ovenfor. Systemet F blir undersøkt §5 og §5.1 - §5.3. I §5 angir vi den vanlige aksiomatiseringen av dette system. Dessuten formulerer vi en reaksiomatisering, F*, som vi har bruk for. Vi gir også et detaljert bevis for at F og F* er ekvivalente. I §5.1 definerer vi klassen av halvsyntaktiske F-modeller og viser detaljert at alle F-teoremer er F-gyldige. I tillegg viser vi fullstendigheten til F med hensyn på F-gyldighet. I §5.2 gjør vi detaljert rede for den Kripke-semantikk for systemet F som presenteres i Hanson [1]. Vi definerer hva som menes med en Kripke -modell og hva som menes med at en formel i L er Kripke F-gyldig. I det neste avsnittet, §5.3, undersøker vi sammenhengen mellom Kripke-modeller for F og halvsyntaktiske modeller for F. Vi viser hvordan vi med utgangspunkt i en halvsyntaktisk F-modell m kan konstruere en Kripke F-

1 Hanson skylder i sin tur Kripke svært mye. Hansons arbeid kan oppfattes som en temmelig likefrem tilpasning til deontisk logikk av de resultater man finner i Kripke [1].

2 En artikkel som på en dyptgående måte drøfter en rekke temaer i forbindelse med deontiske logikker av den typen som undersøkes i dette skrift, og som er svært interessante filosofisk sett, er Hintikkas artikkel "Deontic logic and its philosophical morals". Se Hintikka [1], sid 184 -214.

© Morten Harboe Rognes 2008

modell M som verifiserer nøyaktig de samme formlene. Fra dette kan vi så utlede at enhver formel som er Kripke F-gyldig holder i enhver halvsyntaktisk modell for L. Sammen med det fullstendighetsteorem vi tidligere viste for F i §5.1 kan vi fra dette utlede at en formel er et teorem i F hvis og bare hvis den er Kripke F-gyldig.

I de etterfølgende avsnitt §6 - §10 gjennomfører vi nøyaktig den samme type undersøkelse for systemene D, DM, DB, DS4 og DS5. I §7 tar vi for eksempel for oss systemet DM. Alt som står her er helt analogt med det som tidligere, i §5, er skrevet om systemet F, men visse nokså opplagte modifikasjoner. Vi gir en like eksplisitt behandling av de andre systemene i de øvrige avsnitt. Fremstillingsmåten vi har valgt gjør desverre at det blir mange gjentagelser og mye overlapping.

I §11 avrunder vi våre undersøkelser med beviset for en sats som viser en tydelig sammenheng mellom de deontiske logikkene DM, DB, DS4 og DS5 og de tilsvarende alethiske modallogikkene T, B, S4 og S5. Betegner "X" et av de fire sistnevnte systemer, og "DX" det korresponderende deontiske system, er resultatet at en formel Lα er et teorem i DX hvis og bare hvis α er et teorem i X.

§2 Grunnleggende syntaktiske begreper

Vi tar vårt utgangspunkt i et enkelt setningslogisk språk L hvor de primitive symbolene er: (i) en tellbart uendelig mengde med setningsbokstaver p;1, p;2, p;3,..... , videre (ii) de setningslogiske konnektivene → og ¬, som står for henholdsvis materiell implikasjon og negasjon, samt (iii) den monadiske modaloperatoren L. I tillegg til disse uttrykkene inngår de vanlige parantestegnene i L

De velformede formlene i L, vi betegner mengden av velformede formler med Fm(L), er avgrenset ved de følgende regler: (a) Enhver setningsbokstav er en velformet formel. (b) Er α og β velformede formler så er også (¬α), (α→ β) og Lα velformede formler. (c) Ingen andre formler enn dem som er det etter reglene (a) og (b) er velformede formler.

Når det gjelder de andre vanlige setningslogiske konnektivene, disjunksjon, konjunksjon og bikondisjonal, samt mulighetsoperatoren M, defineres disse på følgende vis:

Definisjon 2.1

$\alpha \vee \beta = (\neg\alpha) \rightarrow \beta$
$\alpha \& \beta = \neg(\alpha \rightarrow (\neg\beta))$
$\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \rightarrow \beta) \& (\beta \rightarrow \alpha)$
$M\alpha = \neg L\neg\alpha$

Med et setningslogisk aksiom i L forstår vi enhver formel som er en instans av ett av de følgende skjemaer:

(S1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
(S2) $((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
(S3) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

I de logikkene vi skal betrakte er det bare én slutningsregel, nemlig modus ponens. Som bekjent er dette:

MP $\vdash \alpha \& \vdash(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \vdash \beta$

Med mengden av setningslogisk gyldige formler i L forstår vi den minste mengden av formler i L som inneholder alle instanser av skjemaene S1 - S3 og som er lukket under modus ponens.

© Morten Harboe Rognes 2008

Vi sier at formelen α er bevisbar i setningslogikken, i symboler "PC|- α" hvis og bare hvis α er den siste formelen i en rekke av formler der hver formel enten er en instans av et av skjemae ne S1 - S3 eller er sluttet fra to foregående formler i rekken ved hjelp av modus ponens. Man innser lett at α en setningslogisk gyldig formel hvis og bare hvis den er bevisbar i setningslogikken.

§3 Modellteori for setningslogiske systemer i L. Halvsyntaktiske modeller

Med en sannhetsmengde, Δ, i L forstår vi en formelmengde Δ som oppfyller de følgende krav:
(i) For enhver setningsbokstav p i L har man enten at p eller ¬p er med i Δ. (ii) Er α en vilkårlig formel i L har man at (¬α)êΔ hvis og bare hvis det ikke er slik at α er med i Δ.
(iii) Er α,β vilkårlige formler i L har man at (α→β)êΔ hvis og bare hvis man har at dersom α er med i Δ så er β det også.

Vi skal nå definere hva vi forstår med en halvsyntaktisk modell for L. Vi formulerer denne definisjonen formelt slik:

Definisjon 3.1 Med en *halvsyntaktisk* modell M forstås et ordnet par <Δ,R> som oppfyller de følgende krav:

(i) Δ er en sannhetsmengde
(ii) R er en, muligens tom, mengde med formler i L
(iii) (Aα)(αêFm(L) → (Lα)êΔ ↔ αêR)

I det følgende skal vi kalle det som her har blitt omtalt som halvsyntaktiske modeller for modeller[3]. En formel α sies å være PC- gyldig dersom vi har for enhver halvsyntaktisk modell
M=<Δ,R> at αêΔ. Vi betegner klassen av halvsyntaktiske modeller med |PC|. Hvis en formel er α holder i enhver modell som er med i |PC|, det vi si er PC-gyldig, skriver vi "|PC| ⊨ α"

Før vi går videre innfører vi projeksjonsfunksjonen π på ordnete par ved de følgende stipulasjoner: Er a= <x,y> setter vi π;1(a) = x og π;2(a) =y. Det er med andre ord slik at dersom a er et ordnet par betegner π;1(a) den første komponenten i paret og π;2(a) den andre komponenten i paret. Trivielt har vi da at a= <π;1(a), π;2(a)> om a er et par.

Det er ganske lett å se at alle setningslogisk gyldige formler i L er gyldige i den betydning som er angitt her. Vi skal gi et detaljert bevis nedenfor selvom det er svært enkelt. Det er med andre ord slik at dersom α er en setningslogisk gyldig formel så har man at αêΔ for enhver halvsyntaktisk modell <Δ,R>. Legger man forskjellige krav på de halvsyntaktiske modellene vil det naturigvis være flere formler i L som blir gyldige enn bare de setningslogiske teoremene i L.

Teorem 3.2 Er α en vilkårlig formel i L gjelder:

(a) PC|- α → |PC| ⊨ α
(b) |PC| ⊨ α ↔ PC |- α

Bevis for (a): Vi skal gi bevis for gyldighetsdelen i denne satsen her. For det første må vi vise at alle instanser av de setningslogiske aksiomskjemaene S1 - S3 er PC-gyldige. Når det

3 Ganske enkelt fordi ordet uttrykket "modell" er kortere en "halvsyntaktisk modell". Når ordet "modell" brukes i det følgende skulle det uansett gå klart frem fra sammenhengen at det må dreie seg om den typen strukturer som er avgrenset ved Definisjon 3.1.

© Morten Harboe Rognes 2008

gjelder disse skjemaene vil det derfor være nok å vise at de alle holder i alle halvsyntaktiske modeller.

(a) Anta M= <Δ, R> er en vilkårlig halvsyntaktisk modell. Anta α,β er vilkårlige formler i L. Vi har åpenbart αêΔ → (βêΔ → αêΔ). Fra dette følger, siden Δ er en sannhetsmengde αêΔ → (β→α)êΔ. Herav har vi så, igjen fordi Δ er en sannhetsmengde at (α→(β→α))êΔ. Dette viser at S1 holder i alle halvsyntaktiske modeller.

(b) Anta M= <Δ, R> er en vilkårlig halvsyntaktisk modell. Anta α,β er vilkårlige formler i L. Det skulle være klart at vi på basis av ren setningslogikk har at
(1) (¬(βêΔ) → ¬(αêΔ)) → (αêΔ → βêΔ). Siden Δ er en sannhetsmengde har vi
(2) (α→β)êΔ ↔ (αêΔ → βêΔ) og (3) (Aα)(αêFm(L) → (¬(αêΔ) ↔ (¬α)êΔ)). Fra (1) - (3) kan man slutte: (4) ((¬β)êΔ → (¬α)êΔ) →(α→β)êΔ. Siden Δ er en sannhetsmengde følger herav: ((¬β) →(¬α))êΔ → (α→β)êΔ. Herav følger i sin tur, når man tar hensyn til kravet (iii) i definisjon av sannhetsmengde, at S2êΔ. Det følger at S2 holder i enhver halvsyntaktisk modell.

(c) Anta M=<Δ,R> er en halvsyntaktisk modell og at α,β,γ er vilkårlige formler i L. Da har vi åpenbart (αêΔ → (βêΔ → γêΔ)) →((αêΔ → βêΔ)→ (αêΔ → γêΔ)). Ved å anvende kravet (iii) i definisjonen av sannhetsmengde ser man at vi har:

(α →(β→γ))êΔ → ((α→β)êΔ → (α→ γ)êΔ) og derfor
(α →(β→γ))êΔ → ((α→β) →(α→γ))êΔ. Herav følger så i sin tur, igjen ved hjelp av kravet (iii) i definisjonen vi ga av sannhetsmengde, at S3êΔ. Siden modellen M og formlene α,β,γ var vilkårlig valgt, viser dette at enhver instans av S3 holder i enhver halvsyntaktisk modell.

(d) Anta C er en delmengde av de halvsyntaktiske modellene. Vi skal vise at dersom α og α→β holder i alle modeller i C så gjør β det også, med andre ord skal vi vise at modus ponens bevarer C-gyldighet. Dette impliserer umiddelbart at dersom α og α→β holder i alle S0.5-modeller vil også β gjøre det. Anta α og α→β holder i enhver modell i mengden C. Dette innebærer at

(1) (AM)(MêC → αêπ;1(M)) og
(2) (AM)(MêC → (α→β)êπ;1(M))

Anta M= <Δ,R> er en vilkårlig i C. Da har vi fra (1) og (2) at
αêΔ & (α→β)êΔ. Men siden Δ er en sannhetsmengde følger fra det at (α→β)êΔ at vi har αêΔ → βêΔ. Fra dette og det at αêΔ følger βêΔ. Siden M var et vilkårlig element i C har vi altså bevist: (AM)(MêC → αêπ;1(M)), med andre ord at også β holder i alle modeller i C.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for det første punktet i Teorem 3.1. QED.

§3.1 En alternativ definisjon av de halvsyntaktiske modellene

Det er mulig å formulere den semantiske teorien vi har presentert ovenfor på en litt annen måte. Med en verditilordning for L forstår vi en funksjon υ som tilordner enhver setningsvariabel enten tallet 1 eller 0. naturligvis er det meningen at tallet 1 representerer sannhetsverdien 1 og 0 sannhetsverdien usann. Med en halvsyntaktisk modellstruktur forstår vi så et ordnet par <υ,R> der υ er en verditilordning for L og R en en delmengde av mengen av formler i L, Fm(L). Er m=<υ,R> en slik modellstruktur kan vi definere hva som menes med at en formel α i L er sann i modellstrukturen m. Vi bruker "<υ,R> ⊨ α" som forkortelse for "α er sann i modellstrukturen <υ,R>". Uttrykket er definert induktivt på lengden av formler i L på følgende måte:

© Morten Harboe Rognes 2008

Definisjon 3.1.1 Anta L er et setningslogisk språk for modallogikk og at <υ,R> er en modellstruktur for L. Da setter vi om αêFm(L):

(i) $\langle \upsilon,R\rangle \models \alpha \leftrightarrow \upsilon(p) = 1$ om α er en utsagnsvariabel i L
(ii) $\langle \upsilon,R\rangle \models \alpha \leftrightarrow \neg(\langle \upsilon,R\rangle \models \beta)$ om βêFm(L) og $\alpha = \neg\beta$
(iii) $\langle \upsilon,R\rangle \models \alpha \leftrightarrow (\langle \upsilon,R\rangle \models \beta \rightarrow \langle \upsilon,R\rangle \models \gamma)$ om $\alpha = (\beta\rightarrow\gamma)$
(iv) $\langle \upsilon,R\rangle \models \alpha \leftrightarrow \beta$êR om $\alpha = L\beta$

En formel α i L sies å være gyldig hvis og bare hvis den er sann i enhver halvsyntaktisk modellstruktur <υ,R>

Det er en relativt triviell sak å se at den semantiske teorien vi har presentert her er ekvivalent med den teorien vi presenterte ovenfor. De følgende to satser viser dette:

Teorem 3.1.2 Anta M=<Q,R> er en halvsyntaktisk modell. Definer en verditiordning υ ved å sette υ(p) =1 hvis og bare hvis pêQ. Definer den halvsyntaktiske modellstrukturen m ved
m=<υ,R>. Da har man for alle formler α i L at αêQ $\leftrightarrow \langle \upsilon,R\rangle \models \alpha$

Vi utelater beviset for denne sats. Det dreier seg om et ytterst trivielt induksjonsbevis på lengden av formler i L. Som man ser kan vi for enhver halvsyntaktisk modell konstruere en halvsyntaktisk modellstruktur som verifiserer akkurat de samme formlene.

Det omvendte er, som man umiddelbart skjønner også mulig. Vi har:

Teorem 3.1.3 Anta m=<υ,R> er en halvsyntaktisk modellstruktur for L. La Q være den minste formelmengden X i L som inneholder alle de setningsvariablene p der vi har υ(p) =1 og alle Lβ der βêR og som dessuten oppfyller de følgende krav: Er β,γ formler i L har vi at $\neg\beta$êX hvis og bare hvis β ikke er med i X og (β→γ) er med i X hvis og bare hvis βêX → γêX. Da har vi:

(i) M=<Q,R> er en halvsyntaktisk modell.
(ii) $(A\alpha)(\alpha$êFm(L) → $\langle \upsilon,R\rangle \models \alpha \leftrightarrow \alpha$êQ

Også når det gjelder denne satsen utelater vi beviset siden det dreier seg om et trivielt induksjonsbevis på lengden av formler i L.

Når det gjelder en halvsyntaktisk modell <υ,R> er det meningen at komponenten R skal representere alle de utsagnene i L som er er nødvendig sanne. Dette stemmer med valusajonsregelen for L som sier at υ(Lα) = 1 hvis og bare hvis αêR. Dette innebærer at en formel av typen "Det er logisk nødvendig at α" er sann hvis og bare hvis α er blandt de formler som er nødvendig sanne i L. Dette virker naturlig. Det er imidlertid et krav som det er naturlig å stille til de halvsyntaktiske modellene dersom L skal tolkes som logisk nødvendighet. Kravet er at alle formlene i L, som jo representerer nødvendige sannheter også er sanne, med andre ord må det kreves at (+) R Inkl Q om <Q,R> er en halvsyntaktisk modell. Det tilsvarende kravet for halvsyntaktiske modellstrukturer vil være $(A\alpha)(\alpha$êR → υ(α)=1). Vi skal kalle halvsyntaktiske modeller som oppfyller dette kravet for "sterke" halvsyntaktiske modeller.

Vi kaller den typen modeller vi her har avgrenset for "halvsyntaktiske" fordi den ene komponenten i en slik modell er en mengde med formler. Formler er syntaktiske størrelser.

© Morten Harboe Rognes 2008

§4 Maksimalt konsistente mengder.

I det følgende lar vi S stå for et hvilket som helst system som er en utvidelse av det setningslogiske systemet ovenfor.

Anta Δ er en formelmengde i L. Vi sier da at den er *S-konsistent* hvis og bare hvis det ikke er slik at det finnes formler β;1,....,β;n (n>=1) slik at S |- ¬(β;1&...&;n). En mengde med formler Δ i L kalles for maksimalt S-konsistent hvis og bare hvis vi har (i) at Δ er S-konsistent og (ii) at det ikke finnes noen formel β i L som ikke er med i Δ slik at ΔU{β} er S-konsistent.

En maksimalt S-konsistent formelmengde er altså en S-konsistent formelmengde som ikke kan utvides med noen nye formler uten at resultatet blir en formelmengde som ikke er S-konsistent. Vi skal ta for gitt den følgende sats, Lindenbaums lemma, som sier at enhver S-konsistent mengde kan utvides til en maksimalt S-konsistent mengde.

Teorem 4.1 Er Δ en S-konsistent mengde med formler i L finnes det en mengde Γ med formler i L som er maksimalt S-konsistent og der Δ er inkludert i Γ.

Når det gjelder beviset for denne satsen kan man konsultere Hughes & Cresswell [1], side 150 -152. Vi trenger også det følgende teorem som viser hva slags egenskaper maksimalt konsistente mengder har. Heller ikke her gir vi noe detaljert bevis, men alt som er nevnt i satsen følger lett fra de satsene som er detlajert bevist i Hughes & Cresswell [1] på side 152 - 154.

Teorem 4.2 Anta Δ er en formelmengde i L som er maksimalt S-konsistent. Da gjelder følgende:

(i) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow \neg(\alpha \hat{e} \Delta \,\&\, (\neg\alpha)\hat{e}\Delta))$
(ii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow \alpha \hat{e}\Delta \vee (\neg\alpha)\hat{e}\Delta)$
(iii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\neg\alpha)\hat{e}\Delta \leftrightarrow \neg(\alpha \hat{e}\Delta)))$
(iv) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow S \vdash \alpha \rightarrow \alpha \hat{e}\Delta)$
(v) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow \alpha, (\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}\Delta \rightarrow \beta\hat{e}\Delta)$
(vi) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}\Delta \leftrightarrow(\alpha\hat{e}\Delta \rightarrow \beta\hat{e}\Delta)))$
(vii) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\alpha\leftrightarrow\beta)\hat{e}\Delta \leftrightarrow(\alpha\hat{e}\Delta \leftrightarrow \beta\hat{e}\Delta)))$
(viii) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\alpha v\beta)\hat{e}\Delta \leftrightarrow(\alpha\hat{e}\Delta \vee \beta\hat{e}\Delta)))$
(ix) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\alpha\&\beta)\hat{e}\Delta \leftrightarrow(\alpha\hat{e}\Delta \,\&\, \beta\hat{e}\Delta)))$
(x) $S \vdash \alpha \rightarrow \alpha \hat{e}\Delta$

Man ser fra denne satsen at dersom Δ er en maksimalt S-konsistent mengde har man Δ også er en sannhetsmengde. Dette følger fra punktene (i), (iii) og (v).

Vi har nå samlet sammen de begrepsdannelsene og hjelpesetningene vi trenger for å kunne levere et bevis for fullstendighetsdelen til Teorem 3.3. Vårt bevis er som følger:

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L og anta (1) ¬(PC |-α). Ved hjelp av definisjonen av konsistent formelmengde kan vi da slutte at {¬α} er en PC-konsistent formelmengde. Fra dette og Lindenbaums lemma, Teorem 4.1 følger at det finnes en maksimalt PC-konsistent formelmengde Γ slik at (2) {¬α} Inkl Γ. Definer R ved å sette:

(3) $R = Mg(\alpha: \alpha \hat{e} Fm(L) \,\&\, L\alpha\hat{e}\Gamma)$

Definer M ved å sette: (4) M= <Γ,R>. Vi skal vise at M er en halvsyntaktisk modell, dvs. oppfyller kravene i Definisjon 3.1. La oss først bemerke at siden Γ er maksimalt konsistent har vi at Γ oppfyller kravene til en sannhetsmengde. Videre følger direkte fra definisjonen (3)

© Morten Harboe Rognes 2008

at

(5) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (L\alpha \hat{e} \Gamma \leftrightarrow \alpha \hat{e} R))$. Dette viser at M er en halvsyntaktisk modell og den derfor er en modell i klassen |PC|. Vi har nå vist at dersom $\neg(PC|\text{-}\alpha)$ så finnes det en semisyntaktisk modell $M=<\Delta,R>$ slik at $\neg(\alpha \hat{e} \Delta)$. Dette kan formuleres slik:

(6) $\neg(PC|\text{-}\alpha) \rightarrow (EM)(M\hat{e}|PC| \ \& \ \neg(\alpha \hat{e} \pi;1(M)))$. Vi har siden $\pi;1(M)$ er en sannhetsmengde at

(7) $\neg(EM)(M\hat{e}|PC| \ \& \ \neg(\alpha \hat{e} \pi;1(M))) \leftrightarrow (AM)(M\hat{e}|PC| \rightarrow \neg\neg(\alpha \hat{e} \pi;1(M))) \leftrightarrow (AM)(M\hat{e}|PC| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M))$

Det følger fra (6) og (7) at: $(AM)(M\hat{e}|PC| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M)) \rightarrow PC|\text{-}\alpha$. Dette viser at punkt (b) i Teorem 3.2 holder. **QED.**

I det følgende skal vi mengden av alle rent setningslogisk gyldige formler med PC*. Vi føyer til stjernen slik at man ikke blander sammen formelmengden PC* med selve systemet PC som vi beskrev i §2. Man har naturlig vis at $PC^* = \{\alpha: \alpha \hat{e} Fm(L) \ \& \ PC|\text{-}\alpha\}$. Vi bemerker også at man rent mekanisk kan avgjøre om en formel i L er med i PC* eller ikke. Den vanlige metoden med å konstruere sannhetsverditabeller kan brukes i denne forbindelse.

§5 Systemet F. Reaksiomatisering

Det setningslogiske modalsystemet F defineres vanligvis slik: Aksiomer i systemet er for det første alle formlene i PC*. I tillegg er alle instanser av det følgende skjema aksiomer i systemet:

(1) $L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta)$

Systemet har bare to slutningsregler, nemlig modus ponens:

MP $\quad |\text{-}\alpha \ \& \ |\text{-} \alpha \rightarrow \beta \quad \rightarrow \quad |\text{-} \beta$

og det som vi her skal kalle nødvendighetsregelen:

RL $\quad |\text{-}\alpha \quad \rightarrow \quad |\text{-}L\alpha$

Som man ser sier denne regelen at dersom formelen α er et teorem i systemet så er også formelen Lα et teorem. Man kan definere systemet F som den minste formelmengden X i L som inneholder alle de nevnte aksiomer og som i tillegg er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen RL.

Før vi går videre gjør vi oppmerksom på at den n-te iterasjonen av L, L(n), er definert induktivt ved den følgende definisjon.

Definisjon 5.1 Vi setter om $n \hat{e} N$:

$L(0)(\alpha) = \alpha$

$L(n+1)(\alpha) = L(L(n)(\alpha))$

Man ser fra denne definisjonen at $L(1)(\alpha)$ rett og slett er $L(\alpha)$. Dessuten at $L(2)(\alpha) = LL\alpha$ og så videre.

På samme måte som de normale systemene vi har undersøkt tidligere kan systemet F aksiomatiseres med modus ponens som eneste slutningsregel. Vi avgrenser først formelmengdene K(f0), K(f) og $K(f);\infty$ ved den følgende definisjon

Definisjon 5.2 Vi setter:

(a) $K(f0) = PC^* \cup Mg((L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow L\alpha \rightarrow L\beta): \alpha,\beta \hat{e} Fm(L))$

(b) K(f) er den minste mengden X av formler i L som oppfyller de følgende krav:

© Morten Harboe Rognes 2008

(i) K(f0) Inkl X
(ii) Er δê X og er γ en vilkårlig formel i L har vi (Lγ → Lδ)êX
(c) K(f);∞ = K(f) U Mg(L(n)(α→α): αêFm(L) & nêN)

Systemet F* er den minste formelmengden i X som inneholder K(f);∞ og som er lukket under modus ponens. Det er altså det systemet som har formlene i K(f);∞ som aksiomer, og der den eneste slutningsregelen er modus ponens. Vi skal vise at F* og F er ekvivalente. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 5.3 (Aα)(αêFm(L) → (αêF* ↔ F |- α))

Bevis: (I) Vi viser først inklusjonen mot høyre , med andre ord at enhver formel i F* er et teorem i T. Det er da nødvendig å vise at alle formlene i K(f);∞ er teoremer i F. I sin tur innebærer dette at man må bevise (1) (An)(nêN → F|- L(n)(α→α)). Det vises ved induksjon på N. Er n=0 har man L(n)(α→α) = α→α. Men α→α er en setningslogisk gyldig formel og derfor et teorem i F. I dette tilfelle har vi derfor F |-α. Anta F|- L(n)(α→α), med andre ord at satsen holder for n. Ved hjelp av nødvendighetsregelen kan vi da slutte F|- L(L(n)(α→α)). I lys av Definisjon 5.1 innebærer dette F|- L(n+1)(α→α). Ved induksjon følger så (1).

For å vise at alle aksiomene i F* er teoremer i F er det nå nødvendig å vise:
(2) K(f) Inkl Mg(α: αêFm(L) & T|- α). Siden K(f) er definert induktivt er det først nødvendig å vise at alle formlene i PC*, og alle formler av typen L(α→β)→ Lα→Lβ er teoremer i F. Men alle disse formlene er også aksiomer i F og derfor teoremer i F. Det eneste vi derfor må gjøre er å å vise at dersom γ er en vilkårlig formel i L og F|- δ, så har man også F |- Lγ →Lδ. Anta derfor at F |- δ. Ved hjelp av nødvendighetsregelen har vi da (3) F |-Lδ. Siden Lδ → (Lγ → Lδ) er en setningslogisk gyldig formel har vi F|- Lδ → (Lγ → Lδ). Fra dette, (3) og modus ponens følger selvfølgelig at T|- Lγ → Lδ.

Dermed har vi vist at (4) (Aα)(αêFm(L) → αêK(f);∞ → F|-α).

Tilslutt bemerker vi at mengden av teoremer i F er lukket under modus ponens. Fra dette og dette og (4) følger at F* er inkludert i mengden av teoremer i T.

(II) Det er også nødvendig å vise at mengden av teoremer i F er inkludert i F*. Vi må da først vise at aksiomene i F er teoremer i F*. Det er klart at PC*, mengden av alle de setningslogisk gyldige formlene i L er teoremer i F*. Vi har jo PC* Inkl K(f);∞ Inkl F* i lys av definisjonen av F*. Videre er det klart at alle formler av typen L(α→B) → (Lα → Lβ) er med i K(f);∞ og derfor er aksiomer i F*. Dette viser at alle aksiomene i F er med i F*.

For å vise at alle teoremene i F er med i F* vil det nå være tilstrekkelig å vise at (1) F* er lukket under modus ponens og at vi har (2) (Aα)(αêF* → LαêF*). Det først er trivielt siden T* per definisjon er lukket under modus ponens. Det andre krever bevis. F* er induktivt definert. Man må derfor vise (2) ved induksjon på F*. Det være tilstrekkelig å vise følgende:

(3) (Aα)(αêK(f);∞ → LαêF*)
(4) (Aα)(A)(Lα êF* & L(α→β)êF* → Lβ êF*)

Vi viser først at (4) holder. Anta for vilkårlige formler α,β at (5) LαêF* og L(α→β)êF*. Siden
L(α→β)→Lα→Lβ er et aksiom i F*, siden det er med i K(f), har vi (L(α→β) →Lα→Lβ)êF*. Fra dette og (5) følger, siden F* er lukket under modus ponens, at (Lα→Lβ)êF*. Men fra dette og (5) følger ved nok en anvendelse av modus ponens at LβêF*. Dette viser at (4) holder.
For å vise (3) vil det, i lys av definisjonen av K(t);∞ være tilstrekkelig å bevise:

© Morten Harboe Rognes 2008

(6.1) αêMg(L(n)(α→α): nêN)→ LαêF*
(6.2) (Aα)(αêK(t) → LαêF*)

Det første er enkelt. Anta αêMg(L(n)(α→α):αêFm(L) & nêN). Da finnes det nêN slik at α=L(n)(β→β) for en eller annen formel β. Da har vi åpenbart at L(α) = L(L(n)(β→β))êK(t);∞ Inkl F*. Dette viser at (6.1) holder.

La oss så se på (6.2). Siden K(f) er induktivt definert må påstanden vises ved induksjon på K(f). Anta δ er en tautologi eller en formel av typen L(α →β)→(Lα→Lβ). Da har vi (L(α→α) → Lδ)êK(f) og derfor åpenbart at (L(α→α) → Lδ)êF*. Siden L(α→α) er med i F* og F* er lukket under modus ponens følger i dette tilfelle at LδêF*. Dermed er basistrinnet bevist. Anta nå for vilkårlig formel δ at δêK(f). Da har vi igjen at (L(α→α) → Lδ)êK(f) og derfor at (L(α→α) → Lδ)êF*. Siden L(α→α) er med i F* og F* er lukket under modus ponens følger derfor også i dette tilfelle at LδêT*. Dermed har vi vist riktigheten av (6.2). vi har dermed gitt et fullstendig bevis for at mengden av teoremer i F er inkludert i F*. **QED.**

§5.1 Halvsyntaktiske modeller for F. Gyldighetsteorem og fullstendighet

Vi har nå avgrenset systemet F presist. Vi har også definert det korresponderende, ekvivalente systemet F*. Det vi nå ønsker å gjøre er å tilordne dette systemet en klasse av halvsyntaktiske modeller. Dernest vil vi vise at alle teoremene i systemet holder i alle modeller i den modellklassen systemet har blitt tilordnet. Dessuten ønsker vi å vise at det motsatte holder, nemlig at dersom en formel holder i alle modellene i den modellklasse som er tilordnet F så er formelen også et teorem i systemet.

Vi avgrenser mengden av F-modeller for språket L.

Definisjon 5.1.1 En F-modell M for språket L er en halvsyntaktisk modell M=<Δ,R> for L som oppfyller de følgende krav:
(i) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → (αêR & (α→β)êR → βêR))
(ii) K(f);∞ Inkl R

Man ser altså at dersom en halvsyntaktisk modell <Δ,R> skal være en F-modell må R være lukket under modus ponens og alle formlene i K(f);∞ være inkludert i R.

En formel α i L er F-gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver F-modell M= <Δ,R> at αêR. Betegner vi klassen av F-modeller med |F|, kan denne definisjonen formaliseres slik:

Definisjon 5.1.2 Anta α er en formel i L. Da gjelder:
(i) α er F-gyldig ↔ (AM)(Mê|F| → αêπ;1(M))

Vi viser først det følgende gyldighetsteorem kalkylen F:

Teorem 5.1.3 (Gyldighetsteorem). Anta α er en vilkårlig formel i L. Da gjelder:
αêF* → α er F-gyldig

Bevis: Siden F* er den minste formelmengden i L som inneholder K(f);∞ og som er lukket under modus ponens er det tilstrekkelig å vise to ting, nemlig
(1) (Aα)(Aβ)(α er F-gyldig & (α→β) er F-gyldig → β er F-gyldig)

© Morten Harboe Rognes 2008

(2) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} K(f);\infty \rightarrow \alpha$ er F-gyldig)

Vi viser først at (1) holder. Anta derfor at (3) α er F-gyldig & (α→β) er F-gyldig. Anta M=<Δ,R> er en vilkårlig F-modell. Fra dette, (3) og definisjonen av F-gyldighet følger at (4) α, (α→β)ê Δ. Men siden M er en F-modell følger det at Δ er en sannhetsmengde. Dette faktum og (4) impliserer at βêΔ. Siden M var en vilkårlig F-modell følger det at β holder i alle F-modeller, med andre ord at β er F-gyldig.

La oss så ta for oss (2). Anta (4) αêK(f);∞ for vilkårlig α. Vi har da i lys av definisjonen av K(f);∞ at α enten er et element i Mg(L(n)(β→β): nêN) eller et element i K(f). Vi ser derfor på to tilfelle:

Tilfelle (a) αêMg((n)(β→β):βêFm(L) & nêN). Da har vi at α=L(n)(β→β) for noe naturlig tall n og en eller annen formel β. Anta M=<Δ,R> er en vilkårlig F-modell. Da har vi at K(f);∞ Inkl R. Det følger ved hjelp av definisjonen av K(f);∞ at (5) Mg(L(n)(β→β): nêN) Inkl R. Er n=0 har vi at α=(β→β) som er en åpenbart setningslogisk gyldig formel. Da har vi siden, Δ er en sannhetsmengde, at (β→β)êΔ. Har vi at n>0 har vi ved hjelp av (5) at L(n-1)(β→β)êR. Siden M er en F-modell og derfor en halvsyntaktisk modell har vi at (6) (Aα)(αêFm(L) → (LαêΔ ↔ αêR)). Fra dette og (5) følger så L(L(n-1)(β→β)) = L(n) (β→β)=αêΔ. Men M=<Δ,R> var en vilkårlig F-modell. Det følger at α er F-gyldig også i dette tilfellet.

Tilfelle (b) Anta (7) αêK(f). Vi ønsker å vise at α er F-gyldig. For dette formål viser vi at følgende holder:

(8) K(f) Inkl Mg(α: αêFm(L) & α er F-gyldig).

Fra dette og (7) følger åpenbart at α er F-gyldig. Det vil derfor være helt tilstrekkelig å bevise (8). Siden K(f) er induktivt definert må vi vise dette ved induksjon på K(f).

Basistrinn: Anta δ enten er en formel som er setningslogisk gyldig, eller er L(α→β)→(Lα→Lβ) for noen α,β. Er δ en formel som er setningslogisk gyldig følger det fra Teorem 3.2 at δ holder i alle halvsyntaktiske modeller og derfor også i alle F-modeller. I dette tilfellet er derfor δ F-gyldig. Anta δ =(L(α→β) →(Lα→Lβ)). Anta at M=<Δ,R> er en vilkårlig F-modell. I lys av Definisjon 6.1 har vi da at M oppfyller kravet:

(9) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → (αêR & (α→β)êR → βêR))

Siden enhver F-modell også oppfyller kravet

(10) (Aα)(αêFm(L) → LαêΔ ↔ αêR) følger:

(11) L(α→β)êΔ → (LαêΔ → LβêΔ) Fra dette kan vi så slutte, siden Δ er en sannhetsmengde at L(α→β)→(Lα→Lβ)êΔ. Siden M var en vilkårlig F-modell følger det at δ holder i alle F-modeller. Det følger at δ er F-gyldig.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for basistrinnet.

Induksjonstrinn: For å godtgjøre (8) må vi også vise det følgende:

(12) Har man δêK(f), og at δ er F-gyldig, gjelder også at (Lγ →Lδ) er F-gyldig

Anta derfor at (13) δêK(t), og at (14) δ er F-gyldig. Vi skal vise at (Lγ→Lδ) er T-gyldig. Anta for reduktio ad absurdum at Lγ → Lδ ikke er F-gyldig. Da vil det finnes en F-modell M=<Δ,R> der vi har: (15) ¬ ((Lγ→Lδ)êΔ). Siden Δ er en sannhetsmengde følger fra dette at (16) LγêΔ & ¬(LδêΔ). Siden M er en F-modell har vi at K(f);∞ Inkl R. Dette innebærer at i lys av definisjonen av K(f);∞ at (17) K(f) Inkl R. Fra dette og (13) har man umidelbart at (18) δêR. Siden M er en F-modell har vi at (10) ovenfor holder. Fra dette og (18) følger LδêΔ som åpenbart strider mot den siste konjunkten i (16). Det følger at Lγ →Lδ er F-gyldig.

© Morten Harboe Rognes 2008

Dette viser at induksjonstrinnet holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (8) og vist at satsen holder. **QED.**

Vi skal vise at det følgende fullstendighetsteorem holder:

Teorem 5.1.4 Anta Γ er en F -konsistent mengde av formler i L. Da finnes en modell Mê | F| slik at Γ Inkl π;1(M)

Bevis: Først er det nødvendig med noen forberedelser. Vi definerer induktivt en sekvens av formelmengder <f(n)>/nêN/ på følgende måte:

(a) f(0) er den formelmengden som inneholder alle de setningslogsk gyldige formlene i L, samt alle formler av typen L(α→β)→(Lα →Lβ).

(b) f(n+1) er f(n) utvidet med alle mulige formler av typen Lγ → Lδ der δêt(n) og γêFm(L). Dette avslutter definisjonen. Vi viser først:

(1) K(f) = UN/nêN/(f(n)),

med andre ord at K(f) er unionen av alle de diverse f(n) ettersom n gjennomløper mengden av de naturlige tall, N.

Vi viser først inklusjonen mot høyre. Dette skjer ved induksjon på K(f). Basistrinn: Vi har umiddelbart at K(f0)=f(0) Inkl UN/nêN/(f(n)). Induksjonstrinn: Anta δêUN/nêN(f(n)). Da har vi αêf(k) for noe kêN. Men da følger (Lγ → Lδ)êt(k+1) i lys av klausul (b) i definisjonen vi har gitt. Det følger at (Lγ→Lδ)êUN/nêN/(f(n)).

Dernest tar vi for oss inklusjonen mot venstre. Denne vises ved inuksjon på n. Basistrinn: I lys av definisjonen av K(f) har vi åpenbart at
f(0) Inkl K(t). Induksjonstrinn: Anta som induksjonshypotese at f(n) Inkl K(f). Anta αêf(n+1) for vilkårlig formel α. Da har vi enten at αêf(n), og i så fall har vi åpenbart ifølge induksjonshypotesen at αêK(f). Eller så har vi at α= (Lγ→Lδ) der δêf(n). Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da δêK(f). Men siden vi da i lys av definisjonen av K(f) har (Lγ→Lδ)êK(f) følger at αêK(f). Vi har nå vist at f(n+1) Inkl K(f).

Fra basistrinnet og det vi har vist under induksjonstrinnet, følger ved induksjon at UN/nêN/(f(n)) Inkl K(f).

Etter disse forberedelsene kan vi ta fatt på selve beviset. Anta (2) Γ er en F-konsistent formelmengde i L. Fra dette og Lindenbaums lemma, Teorem 4.1 følger at det finnes en maksimalt F-konsistent formelmengde Δ slik at (3) Γ Inkl Δ. Definer R ved å sette:

(4) R = Mg(α: αêFm(L) & LαêΔ)

Definer M ved å sette: (5) M= <Δ,R>. Vi skal vise at M er en halvsyntaktisk modell, dvs. oppfyller kravene i Definisjon 3.1. La oss først bemerke at siden Γ er maksimalt konsistent har vi, i lys av Teorem 4.2, at Γ oppfyller kravene til en sannhetsmengde. Videre følger direkte fra definisjonen (4) at (6) (Aα)(αêFm(L) → (LαêΔ ↔ αêR)). Dette viser at M er en halvsyntaktisk modell. Det som nå må gjøres er å vise at M oppfyller kravene til en F-modell. I lys av definisjonen som vi tidligere har gitt av F-modell ser man at det vil være tilstrekkelig å godtgjøre følgende påstander:

(7.1) (Aα)(αβ)(α,βêFm(L) → (αêR & (α→β)êR → βêR))

(7.2) K(f);∞ Inkl R

Vi skal vise at disse påstandene holder under punkt (a) - (c) nedenfor.

(a) Anta for vilkårlige formler at (8) αêR & (α→β)êR. Ved hjelp av (6) kan fra dette slutte at (9) LαêΔ & L(α→β)êΔ. Nå har vi (10) F |- L(α→β)→Lα→Lβ. Fra dette og Teorem 4.1 kan man slutte (11) (L(α→β)→Lα→Lβ)êΔ. Men siden Δ er en sannhetsmengde følger fra

© Morten Harboe Rognes 2008

(11) at $L(\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}\Delta \,\&\, L\alpha\hat{e}\Delta \rightarrow L\beta\hat{e}\Delta$. Fra dette og (9) følger så $L\beta\hat{e}\Delta$. Fra dette og (6) følger endelig $\beta\hat{e}R$. Dette viser at påstanden (7.1) holder.

(b) Vi har at $K(f);\infty$ Inkl F*. Dette innebærer, siden F* er identisk med klassen av alle teoremer i F, at $(A\alpha)(\alpha\hat{e}K(f);\infty \rightarrow F \mid\!-\alpha)$. Siden Δ er en F-maksimalt konsistent mengde følger da at (12) $K(f);\infty$ Inkl Δ ved hjelp av Teorem 4.2. Vi må imidlertid vise at $K(f);\infty$ Inkl R.

Vi viser først at

(13) $Mg(L(n)(\alpha\rightarrow\alpha):\alpha\hat{e}Fm(L) \,\&\, n\hat{e}N)$ Inkl R.

Anta derfor for vilkårlig β at (14) $\beta\hat{e}Mg(L(n)(\alpha\rightarrow\alpha):\alpha\hat{e}Fm(L) \,\&\, n\hat{e}N)$. Da har vi at $\beta=L(n)(\alpha\rightarrow\alpha)$ for noe $n\hat{e}N$ og en eller annen formel α. Da har vi åpenbart

(15) $L\beta = L(L(n)(\alpha\rightarrow\alpha))= L(n+1)(\alpha\rightarrow\alpha)\hat{e}\ Mg(L(n)(\alpha\rightarrow\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L) \,\&n\hat{e}N)$

Men i lys av (12) har vi:

(16) $Mg(L(n)(\alpha\rightarrow\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L) \,\&n\hat{e}N)$ Inkl $K(f);\infty$ Inkl Δ

Fra (15) og (16) følger: $L\beta\ \hat{e}\Delta$ og derfor siden $<\Delta,R>$ er en F-modell at $\beta\hat{e}R$. Dette viser at (13) holder.

Det gjenstår å vise at (17) K(f) Inkl R. Det vil være tilstrekkelig å vise:

(18) $(An)(n\hat{e}N \rightarrow f(n)$ Inkl $R)$

Fra dette følger åpenbart $UN/n\hat{e}N/(f(n))$ Inkl R. Men herav kan vi ved hjelp av (1) ovenfor slutte at (17) holder. La oss derfor vise (18):

Anta n er et vilkårlig tall og δ en vilkårlig formel slik at (19) $\delta\hat{e}f(n)$. Fra definisjonen av mengdesekvensen $<t(n)>/n\hat{e}N/$ fremgår det da at $(L\gamma \rightarrow L\delta)\hat{e}f(n+1)$ for enhver formel γ. Mer spesielt følger at (20) $(L(\alpha\rightarrow\alpha) \rightarrow L\delta)\hat{e}f(n+1)$. Siden vi har:

$f(n+1)$ Inkl $UN/n\hat{e}N/(f(n)) = K(f)$ Inkl Δ følger:

(21) $(L(\alpha\rightarrow\alpha) \rightarrow L\delta)\hat{e}\Delta$. Nå har vi åpenbart siden $K(f);\infty$ Inkl Δ at

(22) $L(\alpha\rightarrow\alpha)\hat{e}Mg(L(n)(\alpha\rightarrow\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L) \,\&n\hat{e}N)$ Inkl $K(f);\infty$ Inkl Δ og derfor $L(\alpha\rightarrow\alpha)\hat{e}\Delta$. Men fra dette og (21) følger, siden Δ er en sannhetsmengde, at $L\delta\hat{e}\Delta$. Siden (6) holder kan vi slutte at $\delta\hat{e}R$. Men n,δ var vilkårlige objekter slik at (19) holdt. Det følger at (18) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (7.2). Dette viser at satsen holder. **QED.**

Som et korollar til Teorem 5.1.4 har man:

Teorem 5.1.5 Anta α er en formel i L. Da gjelder:

(i) $(AM)(M\hat{e}|F| \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(M)) \rightarrow F \mid\!-\alpha$

Bevis: (i) Anta $\neg (F \mid\!-\alpha)$. Da har vi at $\{\neg\alpha\}$ er en F-konsistent formelmengde. Ved hjelp av Teorem 5.1.4 kan man da slutte at det finnes en F-modell M slik at $\{\neg\alpha\}$ Inkl $\pi;1(M)$. Da har vi at $(\neg\alpha)\hat{e}\pi;1(M)$, og følgelig, siden $\pi;1(M)$ er en sannhetsmengde, at $\neg (\alpha\hat{e}\pi;1(M))$. Det følger derfor at $(EM)(M\hat{e}|F| \,\&\, \neg(\alpha\hat{e}\pi;1(M)))$. Da har vi naturligvis: $\neg (AM)(M\hat{e}|T| \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(M))$. Dette viser at (i) holder. **QED.**

Vi skal nevne endel andre forhold. En formelmengde Δ er lukket under F- konsekvens hvis og bare hvis vi har for vilkårlige formler α,β at dersom $\alpha\hat{e}\Delta$ og $(\alpha\rightarrow\beta)$ er et F- teorem så er også $\beta\hat{e}\Delta$. Man kan vise følgende i denne forbindelse:

Teorem 5.1.6 Anta $M=<\Delta,R>$ er en F- modell. Da har man at R er lukket under F- konsekvens.

Bevis: Anta $M=<\Delta,R>$ er en F-modell. da har man per definisjon:

© Morten Harboe Rognes 2008

(1) αêR & (α→β)êR → βêR og
(2) K(f);∞ Inkl R

Ved induksjon på F* følger da at (3) F* Inkl R. Anta nå (4) αêR & F |- (α→β). Fra den siste konjunkten følger at (α→β)êF* og derfor ved hjelp av (3) at (α→β)êR. Fra dette, (1) og den første konjunkten i (4) følger βêR. Dette viser at R er lukket under F-konsekvens. **QED.**

Det følgende kompakthetsteorem kan også bevises ved hjelp av fullstendighetsteoremet, Teorem 5.1.4

Teorem 5.1.7 (Kompakthetsteorem) Anta Δ er en formelmengde i L. Da har man at Δ Inkl π;(M) for en eller annen F- modell M hvis og bare hvis man har for enhver endelig delmengde Γ av Δ at det finnes en F-modell M' slik at Γ Inkl π;1(M').

Bevis: Vi har i kraft av Teorem 5.1.4 at en formelmengde Γ er F-konsistent hvis og bare hvis det finnes en F-modell M slik at Γ Inkl π;1(M). Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at Δ er F-konsistent hvis og bare hvis enhver endelig delmengde av Δ er F-konsistent. Anta Δ er F-konsistent. Da er det i lys av definisjonen av F-konsistent formelmengde opplagt at hver delmengde, og derfor enhver endelig delmengde av Δ er F-konsistent. Anta på den annen side at enhver endelig delmengde av formelmengden Δ er F-konsistent, men at Δ likevel er F-inkonsistent. Da vil det ikraft av definisjonen av F-konsistens i §4 finnes visse formler β;1,...,β;nêΔ slik at T |- ¬(β;1&...&β;n). Da er det imidlertid åpenbart at {β;1,...β;n} er en endelig og F-inkonsistent delmengde av Δ. Men dette er utelukket. Det følger at Δ må være F-konsistent. **QED.**

Teorem 5.1.8 Anta Δ er en formelmengde Anta αêFm(L). Da har vi at αêπ;1(M) for alle F -modeller M der Δ Inkl π;1(M) hvis og bare hvis det finnes formler β;1,...,β:nêΔ slik at (β;1& .... & β;n → α) er et teorem i F

Bevis: (a) Anta Δ er en formelmengde og at α er en formel i L. Da er det ganske opplagt at kondisjonalen mot venstre i satsen holder. For anta (1) F |- (β;1&.... &β;n → α) og (2) β;1,...,β;nêΔ. Anta M er en vilkårlig F-modell der vi har (3) Δ Inkl π;1(M). Fra (1) og gyldighetsteoremet for F følger da (4) (β;1&.... &β;n → α) êπ;1(M). Fra (2) og (3) følger videre (5) β;1,...,;β;n êπ;1(M). Siden π;1(M) er en sannhetsmengde følger fra (4) og (5) at βêπ;1(M). Siden M var en vilkårlig F-modell har vi vist at αêπ;1(M) for alle F-modeller M der Δ Inkl π;1(M).

(b) Anta igjen at Δ er en formelmengde i L og at α er en formel i L. Anta at
(1) α êπ;1(M) for enhver F-modell M der vi har Δ Inkl π;1(M).

Vi skal da vise at høyresiden i bikondisjonalen i teoremet holder. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det ikke finnes β;1,...,β;nêΔ der vi har F |- (β;1 &...& β;n → α). Da kan det ikke finnes β;1....β;nêΔ slik at F |- ¬(β;1&....& β;n & ¬α). Fra definisjonen av F-konsistent formelmengde følger det da at {β;1,...,β;n,¬α} er en F-konsistent formelmengde for alle β;1,...,β;nêΔ. Ved hjelp av fullstendighetsteoremet, Teorem 5.1.4 , kan vi da konkludere med at det for enhver delmengde {β;1,...,β;n} Inkl Δ finnes en F-modell M' slik at {β;1,...,β;n, ¬α} Inkl π;1(M'). Dette innebærer at for enhver endelig del Γ av ΔU{¬α} finnes det en F-modell M* slik at Γ Inkl π;1(M*). Da må det etter kompakthetsteoremet, Teorem 5.1.7 finnes en F-modell M** slik at ΔU{¬α} Inkl π;1(M**). Da har vi imidlertid at

© Morten Harboe Rognes 2008

¬(αêπ;1(M**)) og Δ Inkl π;1(M**) for en eller annen F-modell M**. Dette strider mot (1). **QED.**

Teorem 5.1.9 Anta Δ er en formelmengde som er lukket under F-konsekvens. Anta α er en formel i L. Da har vi at αêΔ hvis og bare hvis αêπ;1(M) for enhver F-modell M der Δ Inkl π;1(M)

Bevis: (a) Anta at forutsetningen i teoremet holder. Anta (1) αêΔ . La M være en vilkårlig F-modell der vi har Δ Inkl π;1(M). Fra dette og (1) følger trivielt at αêπ;1(M). Vi har derfor αêπ;1(M) for enhver F-modell M der Δ Inkl π;1(M).

(b) Anta igjen at forutsetningene holder. Men anta nå at αêπ;1(M) for enhver F-modell M der Δ Inkl π;1(M). Fra dette siste følger ved hjelp av Teorem 5.1.8 at det finnes formler
β;1,...,β;nêΔ slik at F |- (β;1&....&β;n → α). Siden vi etter forutsetningen har at Δ er lukket under F-konsekvens følger umiddelbart at αêΔ. **QED.**

§5.2 Kripke-modeller for F. Gyldighetsteorem.

I dette avsnittet fastlegger vi den Kripke semantikken vi vil arbeide med i forbindelse med systemet F. Vi definerer først hva vi mener med en Kripke F-struktur.

Definisjon 5.2.1 (a) En *Kripke F- struktur* er et ordnet triple <G,K,R> som oppfyller de følgende krav: (i) K er en ikke-tom mengde. (ii) G er et element i K (iii) R er en relasjon over K.

Dernest defineres hva som menes med en verditilordning assosiert med en struktur av typen <G,K,R>. Denne definisjonen er helt identisk med den vi tidligere innførte i forbindelse med systemene T, B, S4 og S5.

Definisjon 5.2.2 Med *en verditilordning φ assosiert med strukturen <G,K,R>*, der K er en ikke-tom mengde, G et element i K og R en relasjon over K, forstår vi en funksjon φ som til enhver setningsvariabel p i L tilordner en delmengde av K

Vi definerer så hva som menes med en Kripke F-modell for L. Dette skjer ved en følgende definisjon:

Definisjon 5.2.3 Men *Kripke F -modell for L* forstås en struktur <φ,G,K,R> der <G,K,R> er en Kripke F -struktur og φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R>.

Endelig definerer vi hva som menes med at en formel α er sann i verdenen w i modellen M=<φ,G,K,R>:

Definisjon 5.2.4 La M= <φ,G,K,R> være en Kripke F-modell for L, w et element i K og α en formel i L. Da defineres "α er sann i verdenen w i modellen M", i symboler "<M,w> ⊨ α" induktivt på lengden av α slik:

(i) Er p en setningsvariabel i L setter vi:
<M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p)

© Morten Harboe Rognes 2008

(ii) Er α,β formler i L setter vi:
$\langle M,w\rangle \models (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\langle M,w\rangle \models \alpha \rightarrow \langle M,w\rangle \models \beta)$

(iii) Er α en formel i L setter vi:
$\langle M,w\rangle \models L\alpha \leftrightarrow (Aw')(w' \hat{e} K \ \& \ wRw' \rightarrow \langle M,w'\rangle \models \alpha)$

Etter disse forberedelsene kan vi nå definere hva som menes med at en formel er Kripke F-gyldig. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 5.2.5 Anta $\alpha \hat{e} Fm(L)$. Da sier vi at α er Kripke F -gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver Kripke F-modell $M= \langle \varphi,G,K,R\rangle$ at $\langle M,G\rangle \models \alpha$

Det er i og for seg lite nytt ved de definisjonene vi har innført ovenfor. De Det er en rutineøvelse å vise at den følgende sats holder. Vi hopper derfor over beviset:

Teorem 5.2.6 Anta α er en formel i L. Er α et teorem i F har vi at α er Kripke F -gyldig.

§5.3 Om sammenhengen mellom F-modeller og Kripke F-modeller.

Vi skal nå gå nærmere inn på sammenhengen mellom F-modeller og den type modeller som har blitt definert i forrige paragraf, nemlig Kripke F-modeller. Vårt viktigste resultat i dette avsnittet er at dersom en formel α er Kripke F-gyldig så er den også F-gyldig. Siden Teorem 5.2.6 sier at ethvert teorem i F er Kripke F-gyldig og vi tidligere har vist at enhver F-gyldig formel er et teorem i F (Teorem 5.1.5) følger det at enhver formel er Kripke F-gyldig hvis og bare hvis den er F-gyldig. De to gyldighetsbegrepene faller derfor sammen. Sammen med vårt tidligere fullstendighetsbevis gir resultatene i dette avsnittet en også et nytt fullstendighetsbevis for at F er fullstendig med hensyn på Kripke F-gyldighet.

Vi minner om at mengden av alle halvsyntaktiske F-modeller betegnes med |F|. Vi definerer en relasjon μ mellom F-modeller ved å sette at $\langle m,m'\rangle \hat{e} \mu$ hvis og bare hvis $m,m' \hat{e} |F|$ og vi dessuten har at $\pi;2(m)$ Inkl $\pi;1(m')$. Holder $\langle m,m'\rangle \hat{e} \mu$ sier vi at F-modellen m' *er underordnet* modellen m. Er m en F-modell betegner Γ(m) den minste delmengden X av |F| der vi har at $m \hat{e} X$ og hvor vi dessuten har for alle F-modeller m,m' at dersom $m \hat{e} X$ og m' er underordnet m så er også $m' \hat{e} X$.

Vi definerer dessuten, om m er en F-modell, relasjonen R;m Inkl |F|X|F| ved å sette:

(+) $R;m = (\mu\ ) \ \Omega \ (\Gamma(m) X \Gamma(m))$

Man ser fra dette at R;m er en relasjon over Γ(m). I tillegg må m;1,m,2 være med i Γ(m).

Teorem 5.3.1 Anta m;0 er en F-modell. Anta videre at $m \hat{e} \Gamma(m;0)$. Da har vi
$L\alpha \hat{e} \pi;1(m) \leftrightarrow (Am')(m' \hat{e} \Gamma(m;0) \ \& \ \langle m,m'\rangle \hat{e} R;(m;0) \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(m'))$

Bevis: Anta (1) at m;0 er en F-modell og (2) $m \hat{e} \Gamma(m;0)$.

(a) Vi gir først et bevis for kondisjonalen mot høyre. Anta derfor (3) $L\alpha \hat{e} \pi;1(m)$ og (4) $m' \hat{e} \Gamma(m;0) \ \& \ \langle m,m'\rangle \hat{e} R;(m;0)$. Fra det siste følger at m' er underordnet m. Da har vi per definisjon at (5) $\pi;2(m)$ Inkl $\pi;1(m')$.

Siden m er en F-modell, og derfor en halvsyntaktisk modell, oppfyller den kravet: (6) $(A\beta)(\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow (L\beta \hat{e} \pi;1(m) \leftrightarrow \beta \hat{e} \pi;2(m)))$. Fra dette og (3) følger $\alpha \hat{e} \pi;2(m)$. herav har vi så ved hjelp av (5) det vi ønsker, nemlig: $\alpha \hat{e} \pi;1(m')$.

© Morten Harboe Rognes 2008

Dette viser at kondisjonalen mot høyre holder.

(b) Vi tar så for oss kondisjonalen mot venstre. Anta

(6) $(Am')(m'\hat{e}\Gamma(m;0) \& \langle m,m'\rangle\hat{e}R;(m;0) \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(m'))$ Fra dette følger:

(7) $(Am')(m'\hat{e}|F| \& \langle m,m'\rangle\hat{e}\mu \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(m'))$ Dette innebærer i sin tur at

(8) $(Am')(m'\hat{e}|F| \ \& \ \pi;2(m)$ Inkl $\pi;1(m') \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(m'))$

Men siden m er en F-modell er $\pi;2(m)$ lukket under F-konsekvens i henhold til Teorem 5.1.6. Fra dette forhold, (8) og Teorem 5.1.9 kan vi slutte at (9) $\alpha\hat{e}\pi;2(m)$. Men siden m er en F-modell oppfyller den kravet: $(A\beta)(\beta\hat{e}Fm(L) \rightarrow (L\beta\hat{e}\pi;1(m) \leftrightarrow \beta\hat{e}\pi;2(m)))$. Fra dette og (9) følger derfor det vi ønsker: $L\alpha\hat{e}\pi;1(m)$.

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Det neste teoremet er avgjørende for å kunne vise at F-gyldighet er ekvivalent med Kripke F-gyldighet.

Teorem 5.3.2 Anta m;0 er et vilkårlig element i |F|. Sett per definisjon:

(i) $G = m;0$

(ii) $K = \Gamma(m;0)$ og

(iii) $R = R;(m;0)$

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) $\varphi(p) = Mg(m: m\hat{e}\Gamma(m;0) \& p\hat{e}\pi;1(m))$

Sett tilslutt (v) $M = \langle \varphi, G,K,R\rangle$. Da har vi:

(a) M er en Kripke F-modell

(b) Er da α en vilkårlig formel i L har vi:

$(Aw)(w\hat{e}K \rightarrow (\langle M,w\rangle \models \alpha \ \leftrightarrow \ \alpha\hat{e}\pi;1(w)))$

Bevis: (a) Det skulle være temmelig opplagt at <G,K,R> er en Kripke F- modellstruktur. Man har at $G=m;0\hat{e}\Gamma(m;0)=K$ i lys av definisjonen av operasjonen Γ. Videre skulle det være klart at R;(m;0) er en relasjon over $K=\Gamma(m;0)$ i lys av definisjonen av R;m. Man innser også lett på basis av definisjonen (iv) i teoremet at φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R> når man studerer Definisjon 5.2.2. Det følger derfor at $M=\langle\varphi,G,K,R\rangle$ er en Kripke F-modell.

(b) Vi beviser dette ved induksjon på lengden av formler i L. Anta w er et vilkårlig element i K. Da har vi $w\hat{e}\Gamma(m;0)$.

(i) Er α en setningsvariabel p har vi at

$\langle M,w\rangle \models \alpha \leftrightarrow \langle M,w\rangle \models p \leftrightarrow w\hat{e}\varphi(p) \leftrightarrow p\hat{e}\pi;1(w)$

(ii) Er $\alpha = \neg\beta$ for en eller annen formel β har vi:

$\langle M,w\rangle \models \neg\beta \ \leftrightarrow \neg(\langle M,w\rangle \models \beta)$

$\leftrightarrow \ \neg(\beta\hat{e}\pi;1(w))$ (Her benytter vi induksjonshypotesen)

$\leftrightarrow \ (\neg\beta)\hat{e}\pi;1(w)$ (Siden π;1(w) er en sannhetsmengde)

$\leftrightarrow \ \alpha\hat{e}\pi;1(w)$

(iii) Er $\alpha=(\beta\rightarrow\gamma)$ for visse formler β,γ har vi:

$\langle M,w\rangle \models (\beta\rightarrow\gamma) \ \leftrightarrow (\langle M,w\rangle \models \beta \rightarrow \langle M,w\rangle \models \gamma)$

$\leftrightarrow \ (\beta\hat{e}\pi;1(w) \rightarrow \gamma\hat{e}\pi;1(w))$ (Etter induksjonshypotese)

$\leftrightarrow \ (\beta\rightarrow\gamma)\hat{e}\pi;1(w)$ (π;1(w) er en sannhetsmengde)

$\leftrightarrow \ \alpha\hat{e}\pi;1(w)$

(iv) Er $\alpha = L\beta$ for en eller annen formel β har vi:

$\langle M,w\rangle \models L\beta \ \leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}K \& \langle w,w'\rangle\hat{e}R;(m;0) \rightarrow \langle M,w'\rangle \models \alpha)$

© Morten Harboe Rognes 2008

↔ (Aw')(w'êΓ(m;0) & <w,w'>êR;(m;0) →αêπ;1(w')

Men i ved hjelp av Teorem 5.3.1 har vi:

(Aw')(w'êΓ(m;0) & <w,w'>êR;(m;0) → αêπ;1(w')) ↔ Lαêπ;1(w)

Det følger at <M,w> ⊨ Lβ ↔ Lαêπ;1(w).

Dette viser at punkt (b) i teoremet holder. **QED.**

Ved hjelp av Teorem 5.3.2 er det nå lett å vise:

Teorem 5.3.3 Anta α er en formel i L. Er da α Kripke F-gyldig er α også F-gyldig.

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L. Anta (1) at α er Kripke F-gyldig. Anta nå at (2) m;0 er en vilkårlig F-modell. Det vil vil være tilstrekkelig å bevise at αêπ;1(m;0). Definer en Kripke F-modell M=<φ, G,K,R> på nøyaktig samme måte som i Teorem 5.3.2. Det vil si sett per definisjon:

(i) G= m;0

(ii) K= Γ(m;0) og

(iii) R = R;(m;0)

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))

Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi i lys av Teorem 5.3.2 at:

(3) (Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w))) herav:

(4) <M,G> ⊨ α ↔ αêπ;1(G) ↔ αêπ;1(m;0)

Men α er etter (1) Kripke F-gyldig og M er en Kripke F-modell. Det følger da at <M,G> ⊨α. Fra dette og (4) følger det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m;0). **QED.**

Vi har tidligere nevnt at ethvert teorem i F er Kripke F-gyldig. Videre har vi fra Teorem 5.1.5 at enhver F-gyldig formel er et teorem i F. Fra dette og Teorem 5.3.3 følger da vårt hovedresultat:

Teorem 5.3.4 En formel α i L er Kripke F-gyldig hvis og bare hvis den er F-gyldig.

§6 Systemet D Reaksiomatisering

Det setningslogiske modalsystemet D defineres vanligvis slik: Aksiomer i systemet er for det første alle formlene i PC*. I tillegg er alle instanser av de følgende to skjemaer aksiomer i systemet:

(1) L(α→β) → (Lα → Lβ)

(2) Lα→Mα

Systemet har bare to slutningsregler, nemlig modus ponens:

MP |-α & |- α→β → |- β

og det som vi her skal kalle nødvendighetsregelen:

RL |-α → |-Lα

Man kan definere systemet D som den minste formelmengden X i L som inneholder alle de nevnte aksiomer og som i tillegg er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen.

På samme måte som de normale systemene vi har undersøkt tidligere kan systemet D

© Morten Harboe Rognes 2008

aksiomatiseres med modus ponens som eneste slutningsregel. Vi avgrenser først formelmengdene K(d0), K(d) og K(d);∞ ved den følgende definisjon

Definisjon 6.1 Vi setter:
(a) K(d0) = PC* U Mg((Lα→Mα): αêFm(L))
UMg((L(α→β)→Lα→Lβ): α,βêFm(L))
(b) K(d) er den minste mengden X av formler i L som oppfyller de følgende krav:
(i) K(d0) Inkl X
(ii) Er δê X og er γ en vilkårlig formel i L har vi (Lγ → Lδ)êX
(c) K(d);∞ = K(d) U Mg(L(n)(α→α): αêFm(L) & nêN)

Systemet D* er den minste formelmengden i X som inneholder K(d);∞ og som er lukket under modus ponens. Det er altså det systemet som har formlene i K(f);∞ som aksiomer, og der den eneste slutningsregelen er modus ponens. Vi skal vise at D* og D er ekvivalente. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 6.2 (Aα)(αêFm(L) → (αêD* ↔ D |- α))

Bevis: Beviset for denne påstanden er nøyaktig som beviset for Teorem 5.3 med visse helt opplagte endringer: Man erstatter "K(f0)" overalt med "K(d0)" samt "K(f)" og "K(f);∞" overalt med henholdsvis "K(d)" og "K(d);∞". Dessuten må alle referanser til systemene F og F* erstattes med referanser til D og D*. Det eneste man behøver å peke på er at K(d0) nå også omfatter alle formler av typen Lα→Mα. Men disse er jo åpenbart aksiomer i D. Omvendt har vi at Lα→Mα er et teorem i D. Men Lα→Mα er med i K(d);∞ og derfor et aksiom i D*. Det følger da at (Lα→Mα)êD*. **QED**

§6.1 Halvsyntaktiske modeller for D. Gyldighetsteorem og fullstendighet

Vi har nå avgrenset systemet D presist. Vi har også definert det korresponderende, ekvivalente systemet D*. Det vi nå ønsker å gjøre er å tilordne dette systemet en klasse av halvsyntaktiske modeller. Dernest vil vi vise at alle teoremene i systemet holder i alle modeller i den modellklassen systemet har blitt tilordnet. Dessuten ønsker vi å vise at det motsatte holder, nemlig at dersom en formel holder i alle modellene i den modellklasse som er tilordnet F så er formelen også et teorem i systemet.

Vi avgrenser mengden av D-modeller for språket L.

Definisjon 6.1.1 En D-modell M for språket L er en halvsyntaktisk modell M=<Δ,R> for L som oppfyller de følgende krav:
(i) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → (αêR & (α→β)êR → βêR))
(ii) K(d);∞ Inkl R
(iii) (Aα)(αêFm(L) → αêR → ¬((¬α)êR)

Man ser altså at dersom en halvsyntaktisk modell <Δ,R> skal være en D-modell må R være lukket under modus ponens og alle formlene i K(d);∞ være inkludert i R. Definisjonen er fullstendig analog med den tilsvarend definsjonen vi ga i forbindelse med systemet F. Den eneste forskjellen er at "K(f);∞" i vår tidligere definisjon er erstattet med "K(d);∞"

En formel α i L er D-gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver D-modell M= <Δ,R> at αêR.

© Morten Harboe Rognes 2008

Betegner vi klassen av D-modeller med |D|, kan denne definisjonen formaliseres slik:

Definisjon 6.1.2 Anta α er en formel i L. Da gjelder:
(i) α er D-gyldig ↔ (AM)(Mê|D| → αêπ;1(M))

Vi viser først det følgende gyldighetsteorem kalkylen D:

Teorem 6.1.3 (Gyldighetsteorem). Anta α er en vilkårlig formel i L. Da gjelder:
αêD* → α er D-gyldig

Bevis: Beviset for dette er helt analogt med beviset for den tilsvarene sats for systemet F, Teorem 5.1.3. Det eneste vi behøver å gjøre i tillegg, er å vise at formelen Lα→Mα er D-gyldig.
Men denne ser man lett at må være gyldig i lys av kravet (iii) i definisjonen av D-modell.
QED.

De følgende teoremer, Teorem 6.1.4 - 6.1.9 er helt analoge med de tilsvarende satser for systemet F. Det er bare små endringer som trengs i bevisene. Vi fomulerer først fullstendighetsteoremet for systemet D, dernest de enkelte følgesetningene til dette teoremet.

Teorem 6.1.4 Anta Γ er en D-konsistent mengde av formler i L. Da finnes en modell Mê |D| slik at Γ Inkl π;1(M)

Bevis: Beviset her blir i det vesentlige som for systemet F. I hovedsaken får man et bevis for D om man overalt i beviset for Teorem 5.1.4 overalt erstatter "F" og "F*" med henholdsvis "D" og "D", videre erstatter alle forekomster av "K(f0)", "K(f)" og "K(f);∞" med henholdsvis "K(d0)", "K(d)" og "K(d);∞". Man må imidlertid redefinere sekvensen av formelmengder <f(n)>/nêN/ som ble innført. I definisjonen av f(0) må man inkludere formelen Lα→Mα. Utover dette kan alt som står i beviset for Teorem 5.1.4 beholdes uendret. Man må imidlertid vise at den modellen, M= <Δ,R>, som konstrueres i beviset oppfyller kravet (iii) i Definisjon 6.1.1:
(Aα)(αêFm(L) → αêR → ¬((¬α)êR)
Man har imidlertid at D* Inkl Δ siden Δ er en maksimalt konsistent mengde. Det følger at Lα→Mα da må være med i Δ siden (Lα→Mα)êK(d);∞ Inkl D* Inkl Δ. Anta αêR. da har vi siden M er en halvsyntaktisk modell at LαêΔ Fra dette og det at (Lα→Mα)êΔ følger, siden Δ er en sannhetsmengde at MαêΔ Dette er ekvivalent med ¬L¬αêΔ. Fra dette og definisjonen av en halvsyntaktisk modell kan man så utlede at ¬((¬α)êR). **QED.**

Vi anfører de følgene satser som er helt analoge med Teorem 5.1.6 - Teorem 5.1.9 uten direkte bevis. Man får imidlertid bevis for disse satsene om man i de tilsvarende bevis for systemet F erstatter alle uttrykk som har tilknytning til F med tilsvarende uttrykk som er definert i forbindelse med systemet D.

Teorem 6.1.5 Anta α er en formel i L. Da gjelder:
(i) (AM)(Mê|D| → αêπ;1(M)) → D |-α

Teorem 6.1.6 Anta M=<Δ,R> er en D-modell. Da har man at R er lukket under

© Morten Harboe Rognes 2008

D-konsekvens.

Teorem 6.1.7 (Kompakthetsteorem) Anta Δ er en formelmengde i L. Da har man at Δ Inkl π;(M) for en eller annen D- modell M hvis og bare hvis man har for enhver endelig delmengde Γ av Δ at det finnes en D-modell M' slik at Γ Inkl π;1(M').

Teorem 6.1.8 Anta Δ er en formelmengde Anta αêFm(L). Da har vi at αêπ;1(M) for alle D -modeller M der Δ Inkl π;1(M) hvis og bare hvis det finnes formler β;1,...,β:nêΔ slik at (β;1& .... & β;n → α) er et teorem i D

Teorem 6.1.9 Anta Δ er en formelmengde som er lukket under D-konsekvens. Anta α er en formel i L. Da har vi at αêΔ hvis og bare hvis αêπ;1(M) for enhver D-modell M der Δ Inkl π;1(M)

Dermed har vi anført de viktigste resultatene vi trenger om halvsyntaktiske modeller for systemet D. Vi skal naturligvis benytte disse resultatene når vi i neste avsnitt undersøker sammenhengen mellom D-modeller og Kripke D-modeller.

§6.2 Kripke-modeller for D. Gyldighetsteorem

De følgende definisjoner er helt analoge med dem som er gitt for systemet F. I Definisjon 6.2.1 er det imidlertid en forskjell fra Definisjon 5.2.1 siden vi av en Kripke D-struktur <G,K,R> krever at R skal være "seriell", det vil si at dersom w er en verden i K skal det alltid finnes en verden w' som er med i K slik at wRw'. Vi gir her definisjonene uten ytterligere forklaringer.

Definisjon 6.2.1 (a) En *Kripke D- struktur* er et ordnet triple <G,K,R> som oppfyller de følgende krav: (i) K er en ikke-tom mengde. (ii) G er et element i K (iii) R er en relasjon over K som oppfyller følgende krav:

(Ax)(xêK → (Ey)(yêK & xRy))

Definisjon 6.2.2 Med *en verditilordning φ assosiert med strukturen <G,K,R>*, der K er en ikke-tom mengde, G et element i K og R en relasjon over K, forstår vi en funksjon φ som til enhver setningsvariabel p i L tilordner en delmengde av K

Definisjon 6.2.3 Men *Kripke D-modell for L* forstås en struktur <φ,G,K,R> der <G,K,R> er en Kripke D -struktur og φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R>.

Definisjon 6.2.4 La M= <φ,G,K,R> være en Kripke D-modell for L, w et element i K og α en formel i L. Da defineres "α er sann i verdenen w i modellen M", i symboler "<M,w> ⊨ α" induktivt på lengden av α slik:

(i) Er p en setningsvariabel i L setter vi:
<M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p)

(ii) Er α,β formler i L setter vi:
<M,w> ⊨ (α → β) ↔ (<M,w> ⊨ α → <M,w> ⊨ β)

(iii) Er α en formel i L setter vi:
<M,w> ⊨ Lα ↔ (Aw')(w'êK & wRw' → <M,w'> ⊨ α)

© Morten Harboe Rognes 2008

Etter disse forberedelsene kan vi nå definere hva som menes med at en formel er Kripke D-gyldig. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 6.2.5 Anta αêFm(L). Da sier vi at α er Kripke D -gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver Kripke D-modell M= <φ,G,K,R> at <M,G> ⊨ α

Det er en rutineøvelse å vise at den følgende sats holder. Vi hopper derfor over beviset:

Teorem 6.2.6 Anta α er en formel i L. Er α et teorem i D har vi at α er Kripke D -gyldig.

§6.3 Om sammenhengen mellom D-modeller og Kripke D-modeller.

Vi skal nå gå nærmere inn på sammenhengen mellom D-modeller og den type modeller som har blitt definert i forrige paragraf, nemlig Kripke D-modeller. Vårt viktigste resultat i dette avsnittet er at dersom en formel α er Kripke D-gyldig så er den også D-gyldig. Siden Teorem 6.2.6 sier at ethvert teorem i D er Kripke D-gyldig og vi tidligere har vist at enhver D-gyldig formel er et teorem i D (Teorem 5.1.5) følger det at enhver formel er Kripke D-gyldig hvis og bare hvis den er D-gyldig. De to gyldighetsbegrepene faller derfor sammen. Sammen med vårt tidligere fullstendighetsbevis gir resultatene i dette avsnittet en også et nytt fullstendighetsbevis for at D er fullstendig med hensyn på Kripke D-gyldighet.

Vi minner om at mengden av alle halvsyntaktiske D-modeller betegnes med |D|. Vi definerer en relasjon μ mellom D-modeller ved å sette at <m,m'>êμ hvis og bare hvis m,m' ê| D| og vi dessuten har at π;2(m) Inkl π;1(m'). Holder <m,m'>êμ sier vi at D-modellen m' *er underordnet* modellen m. Er m en D-modell betegner Γ(m) den minste delmengden X av |D| der vi har at mêX og hvor vi dessuten har for alle D-modeller m,m' at dersom mêX og m' er underordnet m så er også m'êX.

Vi definerer dessuten, om m er en D-modell, relasjonen R;m Inkl |D|X|D| ved å sette:

(+) R;m = (μ) Ω (Γ(m)XΓ(m))

Man ser fra dette at R;m er en relasjon over Γ(m). I tillegg må m;1,m,2 være med i Γ(m). På dette punkt må vi imidlertid vise at relasjonen R;m er seriell. Vi skal vise

(Am)(mê|D| → (Em')(m'ê|D| & mμm')

Anta derfor mê|D|. Da har man at m= <Δ,R> hvor m oppfyller de krav som stilles til en D-modell. Et av de krav som stilles er:

(i) (Aα)(αêFm(L) → (αêR ↔ ¬((¬α)êR)))

Teorem 6.1.6 impliserer at R er lukket under D-konsekvens. Fra dette og (i) kan man slutte at R er D-konsistent. For anta det motsatte. Da ville det finnes β;1,...,β;nêR slik at D|- ¬(β;1&....&β;n). Fra dette kan man slutte D|- β;1,...,β;(n-1) → ¬β;n Siden R er lukket under D-konsekvens følger da ¬β;nêR. Men β;nêR. Dette strider mot kravet (i).

Siden R er D-konsistent har vi i lys av fullstendighetsteoremet for D at det finnes en D-modell m'ê|D| slik at R Inkl π;1(m'). Men R=π;2(m). Det følger at π;2(m) Inkl π;1(m') og derfor at mμm'. Dette viser at relasjonen R;m er seriell.

Teorem 6.3.1 Anta m;0 er en D-modell. Anta videre at mêΓ(m;0). Da har vi

Lαê π;1(m) ↔ (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m'))

© Morten Harboe Rognes 2008

Bevis: Anta (1) at m;0 er en D-modell og (2) mêΓ(m;0).

(a) Vi gir først et bevis for kondisjonalen mot høyre. Anta derfor (3) Lαêπ;1(m) og (4) m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0). Fra det siste følger at m' er underordnet m. Da har vi per definisjon at (5) π;2(m) Inkl π;1(m').

Siden m er en D-modell, og derfor en halvsyntaktisk modell, oppfyller den kravet: (6) (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (3) følger αêπ;2(m). herav har vi så ved hjelp av (5) det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m').

Dette viser at kondisjonalen mot høyre holder.

(b) Vi tar så for oss kondisjonalen mot venstre. Anta

(6) (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m')) Fra dette følger:

(7) (Am')(m'ê|D| & <m,m'>êμ → αêπ;1(m')) Dette innebærer i sin tur at

(8) (Am')(m'ê|D| & π;2(m) Inkl π;1(m') → αêπ;1(m'))

Men siden m er en D-modell er π;2(m) lukket under D-konsekvens i henhold til Teorem 6.1.6. Fra dette forhold, (8) og Teorem 6.1.9 kan vi slutte at (9) αêπ;2(m). Men siden m er en D-modell oppfyller den kravet: (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (9) følger derfor det vi ønsker: Lαêπ;1(m).

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Det neste teoremet er avgjørende for å kunne vise at D-gyldighet er ekvivalent med Kripke D-gyldighet.

Teorem 6.3.2 Anta m;0 er et vilkårlig element i |D|. Sett per definisjon:

(i) G= m;0

(ii) K= Γ(m;0) og

(iii) R = R;(m;0)

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))

Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi:

(a) M er en Kripke D-modell

(b) Er da α en vilkårlig formel i L har vi:

(Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w)))

Bevis: (a) Det skulle være temmelig opplagt at <G,K,R> er en Kripke D- modellstruktur. Man har at G=m;0êΓ(m;0)=K i lys av definisjonen av operasjonen Γ. Videre skulle det være klart at R;(m;0) er en seriell relasjon over K=Γ(m;0) i lys av definisjonen av R;m. Man innser også lett på basis av definisjonen (iv) i teoremet at φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R> når man studerer Definisjon 6.2.2. Det følger derfor at M=<φ,G,K,R> er en Kripke D-modell.

(b) Vi beviser dette ved induksjon på lengden av formler i L. Anta w er et vilkårlig element i K. Da har vi wêΓ(m;0).

(i) Er α en setningsvariabel p har vi at

<M,w> ⊨ α ↔ <M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p) ↔ pêπ;1(w)

(ii) Er α = ¬β for en eller annen formel β har vi:

<M,w> ⊨ ¬β ↔ ¬(<M,w> ⊨ β)

↔ ¬(βêπ;1(w)) (Her benytter vi induksjonshypotesen)

↔ (¬β)êπ;1(w) (Siden π;1(w) er en sannhetsmengde)

© Morten Harboe Rognes 2008

$\leftrightarrow$ $\alpha\hat{e}\pi;1(w)$

(iii) Er $\alpha=(\beta\rightarrow\gamma)$ for visse formler β,γ har vi:

$<M,w> \models (\beta\rightarrow\gamma) \leftrightarrow (<M,w> \models \beta \rightarrow <M,w> \models \gamma)$

$\leftrightarrow$ $(\beta\hat{e}\pi;1(w) \rightarrow \gamma\hat{e}\pi;1(w))$ (Etter induksjonshypotese)

$\leftrightarrow$ $(\beta\rightarrow\gamma)\hat{e}\pi;1(w)$ ($\pi;1(w)$ er en sannhetsmengde)

$\leftrightarrow$ $\alpha\hat{e}\pi;1(w)$

(iv) Er $\alpha = L\beta$ for en eller annen formel β har vi:

$<M,w> \models L\beta \leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}K \,\&\, <w,w'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow <M,w'> \models \alpha)$

$\leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, <w,w'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w')$

Men i ved hjelp av Teorem 6.3.1 har vi:

$(Aw')(w'\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, <w,w'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w')) \leftrightarrow L\alpha\hat{e}\pi;1(w)$

Det følger at $<M,w> \models L\beta \leftrightarrow L\alpha\hat{e}\pi;1(w)$.

Dette viser at punkt (b) i teoremet holder. **QED.**

Ved hjelp av Teorem 6.3.2 er det nå lett å vise:

Teorem 6.3.3 Anta α er en formel i L. Er da α Kripke D-gyldig er α også D-gyldig.

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L. Anta (1) at α er Kripke D-gyldig. Anta nå at (2) m;0 er en vilkårlig D-modell. Det vil vil være tilstrekkelig å bevise at $\alpha\hat{e}\pi;1(m;0)$. Definer en Kripke D-modell $M=<\varphi, G,K,R>$ på nøyaktig samme måte som i Teorem 6.3.2. Det vil si sett per definisjon:

(i) $G= m;0$

(ii) $K= \Gamma(m;0)$ og

(iii) $R = R;(m;0)$

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) $\varphi(p) = Mg(m: m\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, p\hat{e}\pi;1(m))$

Sett tilslutt (v) $M= <\varphi, G,K,R>$. Da har vi i lys av Teorem 6.3.2 at:

(3) $(Aw)(w\hat{e}K \rightarrow (<M,w> \models \alpha \leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w)))$ herav:

(4) $<M,G> \models \alpha \leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(G) \leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(m;0)$

Men α er etter (1) Kripke D-gyldig og M er en Kripke D-modell. Det følger da at $<M,G> \models \alpha$. Fra dette og (4) følger det vi ønsker, nemlig: $\alpha\hat{e}\pi;1(m;0)$. **QED.**

Vi har tidligere nevnt at ethvert teorem i D er Kripke D-gyldig. Videre har vi fra Teorem 6.1.5 at enhver D-gyldig formel er et teorem i D. Fra dette og Teorem 6.3.3 følger da vårt hovedresultat:

Teorem 6.3.4 En formel α i L er Kripke D-gyldig hvis og bare hvis den er D-gyldig.

§7 Systemet DM. Reaksiomatisering

Det setningslogiske modalsystemet DM defineres slik: Aksiomer i systemet er for det første alle formlene i PC*. I tillegg er alle instanser av de følgende to skjemaer aksiomer i systemet:

(1) $L(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta)$

(2) $L\alpha\rightarrow M\alpha$

© Morten Harboe Rognes 2008

(3) $L(L\alpha\rightarrow\alpha)$

Systemet har bare to slutningsregler, nemlig modus ponens:

MP $\vdash\alpha \;\&\; \vdash \alpha\rightarrow\beta \;\rightarrow\; \vdash \beta$

og det som vi her skal kalle nødvendighetsregelen:

RL $\vdash\alpha \;\rightarrow\; \vdash L\alpha$

Man kan definere systemet DM som den minste formelmengden X i L som inneholder alle de nevnte aksiomer og som i tillegg er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen RL.

På samme måte som de normale systemene vi har undersøkt tidligere kan systemet DM aksiomatiseres med modus ponens som eneste slutningsregel. Vi avgrenser først formelmengdene K(dm0), K(dm) og K(dm);∞ ved den følgende definisjon

Definisjon 7.1 Vi setter:

(a) $K(dm0) = PC^* \cup Mg((L\alpha\rightarrow M\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L)) \cup Mg((L(L\alpha\rightarrow\alpha)): \alpha\hat{e}Fm(L)) \cup Mg((L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L\alpha\rightarrow L\beta): \alpha,\beta\hat{e}Fm(L))$

(b) K(dm) er den minste mengden X av formler i L som oppfyller de følgende krav:
   (i) K(dm0) Inkl X
   (ii) Er $\delta\hat{e}$ X og er γ en vilkårlig formel i L har vi $(L\gamma \rightarrow L\delta)\hat{e}X$

(c) $K(dm);\infty = K(d) \cup Mg(L(n)(\alpha\rightarrow\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L) \;\&\; n\hat{e}N)$

Systemet DM* er den minste formelmengden i X som inneholder K(dm);∞ og som er lukket under modus ponens. Det er altså det systemet som har formlene i K(dm);∞ som aksiomer, og der den eneste slutningsregelen er modus ponens. Vi skal vise at DM* og DM er ekvivalente. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 7.2 $(A\alpha)(\alpha\hat{e}Fm(L) \rightarrow (\alpha\hat{e}DM^* \leftrightarrow DM \vdash \alpha))$

Bevis: Beviset for denne påstanden er nøyaktig som beviset for Teorem 5.3 med visse helt opplagte endringer: Man erstatter "K(f0)" overalt med "K(dm0)" samt "K(f)" og "K(f);∞" overalt med henholdsvis "K(dm)" og "K(dm);∞". Dessuten må alle referanser til systemene F og F* erstattes med referanser til DM og DM*. Det eneste man behøver å peke på er at K(dm0) nå også omfatter alle formler av typen $L\alpha\rightarrow M\alpha$ og $L(L\alpha\rightarrow\alpha)$. Men disse er jo åpenbart aksiomer i DM. Omvendt har vi at $L\alpha\rightarrow M\alpha$ er et teorem i DM. Men $L\alpha\rightarrow M\alpha$ er med i K(dm);∞ og derfor et aksiom i DM*. Det følger da at $(L\alpha\rightarrow M\alpha)\hat{e}DM^*$. Nøyaktig det samme resonnement kan brukes i forbindelse med skjemaet $L(L\alpha\rightarrow\alpha)$. **QED**

§7.1 Halvsyntaktiske modeller for DM. Gyldighetsteorem og fullstendighet

Vi har nå avgrenset systemet DM presist. Vi har også definert det korresponderende, ekvivalente systemet DM*. Det vi nå ønsker å gjøre er å tilordne dette systemet en klasse av halvsyntaktiske modeller. Dernest vil vi vise at alle teoremene i systemet holder i alle modeller i den modellklassen systemet har blitt tilordnet. Dessuten ønsker vi å vise at det motsatte holder, nemlig at dersom en formel holder i alle modellene i den modellklasse som er tilordnet F så er formelen også et teorem i systemet.

Vi avgrenser mengden av DM-modeller for språket L.

© Morten Harboe Rognes 2008

Definisjon 7.1.1 En DM-modell M for språket L er en halvsyntaktisk modell M=<Δ,R> for L som oppfyller de følgende krav:

(i) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow (\alpha \hat{e} R \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} R \rightarrow \beta \hat{e} R))$

(ii) $K(dm);\infty$ Inkl R

(iii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow \alpha \hat{e} R \rightarrow \neg((\neg\alpha) \hat{e} R)$

(iv) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (L\alpha \rightarrow \alpha) \hat{e} R$

Man ser altså at dersom en halvsyntaktisk modell <Δ,R> skal være en DM-modell må R være lukket under modus ponens og alle formlene i K(dm);∞ være inkludert i R. Definisjonen er fullstendig analog med den tilsvarend definsjonen vi ga i forbindelse med systemet D. Den eneste forskjellen er at "K(d);∞" i vår tidligere definisjon er erstattet med "K(dm);∞", og at vi har føyet til klausulen (iv).

En formel α i L er DM-gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver DM-modell M= <Δ,R> at $\alpha \hat{e} R$. Betegner vi klassen av DM-modeller med |DM|, kan denne definisjonen formaliseres slik:

Definisjon 7.1.2 Anta α er en formel i L. Da gjelder:

(i) α er DM-gyldig $\leftrightarrow (AM)(M \hat{e} |DM| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M))$

Vi viser først det følgende gyldighetsteorem kalkylen DM:

Teorem 7.1.3 (Gyldighetsteorem). Anta α er en vilkårlig formel i L. Da gjelder:

$\alpha \hat{e} DM^* \rightarrow$ α er DM-gyldig

Bevis: Beviset for dette er helt analogt med beviset for den tilsvarene sats for systemet D, Teorem 6.1.3. Det eneste vi behøver å gjøre i tillegg, er å vise at formelen $L(L\alpha \rightarrow \alpha)$ er DM-gyldig. Men denne ser man lett at må være gyldig i lys av kravet (iv) i definisjonen av DM-modell. **QED.**

De følgende teoremer, Teorem 7.1.4 - 7.1.9 er helt analoge med de tilsvarende satser for systemet D. Det er bare små endringer som trengs i bevisene. Vi fomulerer først fullstendighetsteoremet for systemet DM, dernest de enkelte følgesetningene til dette teoremet.

Teorem 7.1.4 Anta Γ er en DM-konsistent mengde av formler i L. Da finnes en modell $M \hat{e} |DM|$ slik at Γ Inkl π;1(M)

Bevis: Beviset her blir i det vesentlige som for systemet F. I hovedsaken får man et bevis for DM om man overalt i beviset for Teorem 5.1.4 overalt erstatter "F" og "F*" med henholdsvis "DM" og "DM*", videre erstatter alle forekomster av "K(f0)", "K(f)" og "K(f);∞" med henholdsvis "K(dm0)", "K(dm)" og "K(dm);∞". Man må imidlertid redefinere sekvensen av formelmengder <f(n)>/n$\hat{e}$N/ som ble innført. I definisjonen av f(0) må man inkludere formlene $L\alpha \rightarrow M\alpha$ og $(L\alpha \rightarrow \alpha)$. Utover dette kan alt som står i beviset for Teorem 5.1.4 beholdes uendret. Man må imidlertid vise at den modellen, M= <Δ,R>, som konstrueres i beviset oppfyller kravet (iii) i Definisjon 7.1.1:

$(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow \alpha \hat{e} R \rightarrow \neg((\neg\alpha) \hat{e} R)$

© Morten Harboe Rognes 2008

Man har imidlertid at DM* Inkl Δ siden Δ er en maksimalt konsistent mengde. Det følger at Lα→Mα da må være med i Δ siden (Lα→Mα)êK(dm);∞ Inkl DM* Inkl Δ. Anta αêR. da har vi siden M er en halvsyntaktisk modell at LαêΔ Fra dette og det at (Lα→Mα)êΔ følger, siden Δ er en sannhetsmengde at MαêΔ Dette er ekvivalent med ¬L¬αêΔ. Fra dette og definisjonen av en halvsyntaktisk modell kan man så utlede at ¬((¬α)êR).

Dessuten må man vise at modellen M= <Δ,R>, som oppfyller kravet (iv) i Definisjon 7.1.1:

Man har imidlertid at DM* Inkl Δ siden Δ er en maksimalt konsistent mengde. Det følger at L(Lα→α) da må være med i Δ siden (L(Lα→α))êK(dm);∞ Inkl DM* Inkl Δ. Men siden vi har i enhver halvsyntaktisk modell at LαêΔ ↔ αêR for alle formler α, følger det at (Lα→α)êR. Dette viser at kravet (iv) i definisjonen av DM-modell er oppfylt. **QED.**

Vi anfører de følgene satser som er helt analoge med Teorem 6.1.6 - Teorem 6.1.9 uten direkte bevis. Man får imidlertid bevis for disse satsene om man i de tilsvarende bevis for systemet F erstatter alle uttrykk som har tilknytning til F med tilsvarende uttrykk som er definert i forbindelse med systemet DM.

Teorem 7.1.5 Anta α er en formel i L. Da gjelder:
(i) (AM)(Mê|DM| → αêπ;1(M)) → DM |-α

Teorem 7.1.6 Anta M=<Δ,R> er en DM-modell. Da har man at R er lukket under DM-konsekvens.

Teorem 7.1.7 (Kompakthetsteorem) Anta Δ er en formelmengde i L. Da har man at Δ Inkl π;(M) for en eller annen DM-modell M hvis og bare hvis man har for enhver endelig delmengde Γ av Δ at det finnes en DM-modell M' slik at Γ Inkl π;1(M').

Teorem 7.1.8 Anta Δ er en formelmengde Anta αêFm(L). Da har vi at αêπ;1(M) for alle DM -modeller M der Δ Inkl π;1(M), hvis og bare hvis det finnes formler β;1,...,β:nêΔ slik at (β;1& .... & β;n → α) er et teorem i DM

Teorem 7.1.9 Anta Δ er en formelmengde som er lukket under DM-konsekvens. Anta α er en formel i L. Da har vi at αêΔ hvis og bare hvis αêπ;1(M) for enhver DM-modell M der Δ Inkl π;1(M)

Dermed har vi anført de viktigste resultatene vi trenger om halvsyntaktiske modeller for systemet DM. Vi skal naturligvis benytte disse resultatene når vi i neste avsnitt undersøker sammenhengen mellom DM-modeller og Kripke DM-modeller.

§7.2 Kripke-modeller for DM. Gyldighetsteorem

De følgende definisjoner er helt analoge med dem som er gitt for systemet D. I Definisjon 7.2.1 er det imidlertid en forskjell fra Definisjon 6.2.1 siden vi av en Kripke DM-struktur <G,K,R> krever at R skal skal oppfylle kravet (Ax)(Ay)(x,yêK → (xRy → yRy)). Dette kravet må pålegges Kripke-modellene for systemet DM for at vi skal bli istand til å vise at skjemaet L(Lα→α) er gyldig. Vi gir her definisjonene uten ytterligere forklaringer.

Definisjon 7.2.1 (a) En *Kripke DM-struktur* er et ordnet triple <G,K,R> som oppfyller de

© Morten Harboe Rognes 2008

følgende krav: (i) K er en ikke-tom mengde. (ii) G er et element i K (iii) R er en relasjon over K som oppfyller følgende krav:

(i) $(Ax)(x\hat{e}K \rightarrow (Ey)(y\hat{e}K \,\&\, xRy))$

(ii) $(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}K \rightarrow (xRy \rightarrow yRy))$

Definisjon 7.2.2 Med *en verditilordning φ assosiert med strukturen <G,K,R>*, der K er en ikke-tom mengde, G et element i K og R en relasjon over K, forstår vi en funksjon φ som til enhver setningsvariabel p i L tilordner en delmengde av K

Definisjon 7.2.3 Men *Kripke DM-modell for L* forstås en struktur <φ,G,K,R> der <G,K,R> er en Kripke DM -struktur og φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R>.

Definisjon 7.2.4 La M= <φ,G,K,R> være en Kripke DM-modell for L, w et element i K og α en formel i L. Da defineres "α er sann i verdenen w i modellen M", i symboler "$<M,w> \models \alpha$" induktivt på lengden av α slik:

(i) Er p en setningsvariabel i L setter vi:
$<M,w> \models p \;\leftrightarrow\; w\hat{e}\varphi(p)$

(ii) Er α,β formler i L setter vi:
$<M,w> \models (\alpha \rightarrow \beta) \;\leftrightarrow\; (<M,w> \models \alpha \rightarrow <M,w> \models \beta)$

(iii) Er α en formel i L setter vi:
$<M,w> \models L\alpha \;\leftrightarrow\; (Aw')(w'\hat{e}K \,\&\, wRw' \rightarrow <M,w'> \models \alpha)$

Etter disse forberedelsene kan vi nå definere hva som menes med at en formel er Kripke DM-gyldig. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 7.2.5 Anta $\alpha\hat{e}Fm(L)$. Da sier vi at α er Kripke DM -gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver Kripke DM-modell M= <φ,G,K,R> at $<M,G> \models \alpha$

Det er en relativt enkel sak å vise at den følgende sats holder. Vi skal imilertid ta for oss noen trinn i beviset:

Teorem 7.2.6 Anta α er en formel i L. Er α et teorem i DM har vi at α er Kripke DM -gyldig.

Bevis: (a) Vi vil først vise at aksiomskjemaet L(Lα→α) er Kripke M-gyldig.
Anta for reduktio ad absurdum at det finnes en DM-modell M=<φ,G,K,R> der vi har at $\neg(<M,G> \models L(L\alpha\rightarrow\alpha))$. I lys av definisjonen av $\models$ har man da at det må vinnes en $w\hat{e}K$ der (1) GRw og (2) $\neg(<M,w> \models L\alpha\rightarrow\alpha)$. Ved hjelp av Definisjon 7.2.4 følger herav at (3) $<M,w> \models L\alpha \;\&\; \neg(<M,w> \models \alpha)$. Fra den første konjunkter følger:

(4) $(Aw')(w'\hat{e}K \,\&\, wRw' \rightarrow <M,w'> \models \alpha)$ Siden $G,w\hat{e}K$ har vi siden M oppfyller kravet (ii) i Definisjon 7.2.1 at wRw. Dette og (4) impliserer åpenbart $<M,w> \models \alpha$. Men dette strider mot (3). Det kan derfor ikke finnes noen Kripke DM-modell M slik at $\neg(<M,G> \models L(L\alpha\rightarrow\alpha))$. Det følger at skjemaet L(Lα→α) er gyldig i alle DM-modeller.
(a) Vi ønsker dernest å vise at nødvendighetsregelen, $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$ bevarer gyldighet. Anta derfor at (1) α er Kripke DM-gyldig. Anta for reduktio ad absurdum at Lα ikke er Kripke DM-gyldig. Da vil det finnes en Kripke DM-modell M=<φ,G,K,R> slik at (1) $\neg(<M,G> \models L\alpha)$.

© Morten Harboe Rognes 2008

Fra dette følger det finnes en w der vi har (2) wêK & GRw og (3) ¬(<M,w> ⊨α). Definer nå M' ved å sette M'= <φ,w,K,R>. Man ser at φ i tilegg til å være en verditilordning assosiert med strukturen <G,KR> også er en verditilordning assosiert med <w,K,R>. I lys av Definisjon 7.2.1 ser man også, nesten umiddelbart, at <w,K,R> er en Kripke DM-struktur. Det følger at

(4) M' =<φ,w,K,R> er en Kripke-DM-modell. Man beviser nå ved et meget enkelt induksjonsbevis på lengden av formler i L at:

(5) Er α en formel i L og wêK gjelder: <M,w> ⊨ α ↔ <M',w> ⊨ α

Men α er Kripke DM-gyldig. Det følger at vi derfor har har <M',w> ⊨α siden M' er en Kripke DM-modell. Fra dette og (5) følger <M,w> ⊨ α som åpenbart strider mot (3). Det er altså umulig at det kan finnes noen Kripke DM-modell M=<φ,G,K,R> slik at (1). Det følger at Lα er Kripke M-gyldig.

De andre trinnene i beviset for satsen er av en så elementær natur at vi utelater dem. **QED.**

§7.3 Om sammenhengen mellom DM-modeller og Kripke DM-modeller.

Vi skal nå gå nærmere inn på sammenhengen mellom DM-modeller og den type modeller som har blitt definert i forrige paragraf, nemlig Kripke DM-modeller. Vårt viktigste resultat i dette avsnittet er at dersom en formel α er Kripke DM-gyldig så er den også DM-gyldig. Siden Teorem 7.2.6 sier at ethvert teorem i DM er Kripke DM-gyldig og vi tidligere har vist at enhver DM-gyldig formel er et teorem i DM (Teorem 7.1.5) følger det at enhver formel er Kripke DM-gyldig hvis og bare hvis den er DM-gyldig. De to gyldighetsbegrepene faller derfor sammen. Sammen med vårt tidligere fullstendighetsbevis gir resultatene i dette avsnittet en også et nytt fullstendighetsbevis for at DM er fullstendig med hensyn på Kripke DM-gyldighet.

Vi minner om at mengden av alle halvsyntaktiske DM-modeller betegnes med |DM|. Vi definerer en relasjon μ mellom DM-modeller ved å sette at <m,m'>êμ hvis og bare hvis m,m' ê|DM| og vi dessuten har at π;2(m) Inkl π;1(m'). Holder <m,m'>êμ sier vi at DM-modellen m' *er underordnet* modellen m. Er m en DM-modell betegner Γ(m) den minste delmengden X av |DM| der vi har at mêX og hvor vi dessuten har for alle DM-modeller m,m' at dersom mêX og m' er underordnet m så er også m'êX.

Vi definerer dessuten, om m er en DM-modell, relasjonen R;m Inkl |D|X|D| ved å sette:

(+) R;m = (μ) Ω (Γ(m)XΓ(m))

Man ser fra dette at R;m er en relasjon over Γ(m). I tillegg må m;1,m,2 være med i Γ(m). På dette punkt må vi imidlertid vise at relasjonen R;m er seriell. Vi skal vise

(Am)(mê|DM| → (Em')(m'ê|DM| & mμm')

Anta derfor mê|DM|. Da har man at m= <Δ,R> hvor m oppfyller de krav som stilles til en DM-modell. Et av de krav som stilles er:

(i) (Aα)(αêFm(L) → (αêR ↔ ¬((¬α)êR)))

Teorem 7.1.6 impliserer at R er lukket under DM-konsekvens. Fra dette og (i) kan man slutte at R er D-konsistent. For anta det motsatte. Da ville det finnes β;1,...,β;nêR slik at D|- ¬(β;1&....&β;n). Fra dette kan man slutte D|- β;1,...,β;(n-1) → ¬β;n Siden R er lukket under D-konsekvens følger da ¬β;nêR. Men β;nêR. Dette strider mot kravet (i).

Siden R er DM-konsistent har vi i lys av fullstendighetsteoremet for DM at det finnes en DM-modell m'ê|DM| slik at R Inkl π;1(m'). Men R=π;2(m). Det følger at π;2(m) Inkl π;1(m') og derfor at mμm'. Dette viser at relasjonen R;m er seriell.

© Morten Harboe Rognes 2008

Det er imidlertid også nødvendig å vise at R;m slik vi har definert den oppfyller det andre kravet i Definisjon 7.2.1. Vi skal vise at følgende holder:

(ii) m,m'ê|DM| → mμm' → m'μm'

Anta (1) m,m'ê |DM| og anta at (2) mμm'. Fra dette siste og definisjonen av μ følger:
(3) π;2(m) Inkl π;1(m'). For å vise at m'μm' vil det være tilstrekkelig å bevise:
(4) π;2(m') Inkl π;1(m'). Anta derfor for vilkårlig α at (5) αêπ;2(m'). Siden m er en DM-modell følger det at L(Lα→α)êπ;1(m). Fra dette og definisjonen av DM-modell følger det at (6) (Lα→α)êπ;2(m). Fra dette og (3) følger så (7) (Lα→α)êπ;1(m'). Fra (5) følger siden m' er en DM-modell at (8) Lαêπ;1(m'). Siden m' er en DM-modell er π;1(m') en sannhetsmengde.
Fra dette faktum, (7) og (8) følger αêπ;1(m'). Men α var en vilkårlig formel slik at (5). Dette viser at (4) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (ii).

Teorem 7.3.1 Anta m;0 er en DM-modell. Anta videre at mêΓ(m;0). Da har vi
Lαê π;1(m) ↔ (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m'))

Bevis: Anta (1) at m;0 er en DM-modell og (2) mêΓ(m;0).

(a) Vi gir først et bevis for kondisjonalen mot høyre. Anta derfor (3) Lαêπ;1(m) og (4) m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0). Fra det siste følger at m' er underordnet m. Da har vi per definisjon at (5) π;2(m) Inkl π;1(m').

Siden m er en DM-modell, og derfor en halvsyntaktisk modell, oppfyller den kravet: (6) (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (3) følger αêπ;2(m). herav har vi så ved hjelp av (5) det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m').

Dette viser at kondisjonalen mot høyre holder.

(b) Vi tar så for oss kondisjonalen mot venstre. Anta

(6) (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m')) Fra dette følger:
(7) (Am')(m'ê|DM| & <m,m'>êμ → αêπ;1(m')) Dette innebærer i sin tur at
(8) (Am')(m'ê|DM| & π;2(m) Inkl π;1(m') → αêπ;1(m'))

Men siden m er en DM-modell er π;2(m) lukket under DM-konsekvens i henhold til Teorem 7.1.6. Fra dette forhold, (8) og Teorem 7.1.9 kan vi slutte at (9) αêπ;2(m). Men siden m er en DM-modell oppfyller den kravet: (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (9) følger derfor det vi ønsker: Lαêπ;1(m).

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Det neste teoremet er avgjørende for å kunne vise at DM-gyldighet er ekvivalent med Kripke D-gyldighet.

Teorem 7.3.2 Anta m;0 er et vilkårlig element i |DM|. Sett per definisjon:

(i) G= m;0
(ii) K= Γ(m;0) og
(iii) R = R;(m;0)

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))

Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi:

(a) M er en Kripke DM-modell
(b) Er da α en vilkårlig formel i L har vi:
(Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w)))

© Morten Harboe Rognes 2008

Bevis: (a) Det skulle være temmelig opplagt at <G,K,R> er en Kripke DM-modellstruktur. Man har at G=m;0êΓ(m;0)=K i lys av definisjonen av operasjonen Γ. Videre skulle det være klart at R;(m;0) er en seriell relasjon over K=Γ(m;0) i lys av definisjonen av R;m. Det fremgår også fra det vi beviste ovenfor at <G,K,R> oppfyller det andre kravet i definisjonen vi ga av en Kripke DM-modellstruktur. Man innser også lett på basis av definisjonen (iv) i teoremet at φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R> når man studerer Definisjon 7.2.2. Det følger derfor at M=<φ,G,K,R> er en Kripke DM-modell.

(b) Vi beviser dette ved induksjon på lengden av formler i L. Anta w er et vilkårlig element i K. Da har vi wêΓ(m;0).

(i) Er α en setningsvariabel p har vi at

$$<M,w> \models \alpha \leftrightarrow <M,w> \models p \leftrightarrow w\hat{e}\varphi(p) \leftrightarrow p\hat{e}\pi;1(w)$$

(ii) Er $\alpha = \neg\beta$ for en eller annen formel β har vi:

$$<M,w> \models \neg\beta \leftrightarrow \neg(<M,w> \models \beta)$$
$$\leftrightarrow \neg(\beta\hat{e}\pi;1(w)) \quad \text{(Her benytter vi induksjonshypotesen)}$$
$$\leftrightarrow (\neg\beta)\hat{e}\pi;1(w) \quad \text{(Siden } \pi;1(w) \text{ er en sannhetsmengde)}$$
$$\leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w)$$

(iii) Er $\alpha=(\beta\rightarrow\gamma)$ for visse formler β,γ har vi:

$$<M,w> \models (\beta\rightarrow\gamma) \leftrightarrow (<M,w> \models \beta \rightarrow <M,w> \models \gamma)$$
$$\leftrightarrow (\beta\hat{e}\pi;1(w) \rightarrow \gamma\hat{e}\pi;1(w)) \quad \text{(Etter induksjonshypotese)}$$
$$\leftrightarrow (\beta\rightarrow\gamma)\hat{e}\pi;1(w) \quad (\pi;1(w) \text{ er en sannhetsmengde})$$
$$\leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w)$$

(iv) Er $\alpha = L\beta$ for en eller annen formel β har vi:

$$<M,w> \models L\beta \leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}K \,\&\, <w,w'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow <M,w'> \models \alpha)$$
$$\leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, <w,w'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w')$$

Men i ved hjelp av Teorem 7.3.1 har vi:

$$(Aw')(w'\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, <w,w'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w')) \leftrightarrow L\alpha\hat{e}\pi;1(w)$$

Det følger at $<M,w> \models L\beta \leftrightarrow L\alpha\hat{e}\pi;1(w)$.

Dette viser at punkt (b) i teoremet holder. **QED.**

Ved hjelp av Teorem 7.3.2 er det nå lett å vise:

Teorem 7.3.3 Anta α er en formel i L. Er da α Kripke DM-gyldig er α også DM-gyldig.

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L. Anta (1) at α er Kripke DM-gyldig. Anta nå at (2) m;0 er en vilkårlig DM-modell. Det vil vil være tilstrekkelig å bevise at αêπ;1(m;0). Definer en Kripke DM-modell M=<φ, G,K,R> på nøyaktig samme måte som i Teorem 7.3.2. Det vil si, sett per definisjon:

(i) G= m;0
(ii) K= Γ(m;0) og
(iii) R = R;(m;0)

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) $\varphi(p) = Mg(m: m\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, p\hat{e}\pi;1(m))$

Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi i lys av Teorem 7.3.2 at:

(3) $(Aw)(w\hat{e}K \rightarrow (<M,w> \models \alpha \leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w)))$ herav:

(4) $<M,G> \models \alpha \leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(G) \leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(m;0)$

Men α er etter (1) Kripke DM-gyldig og M er en Kripke D-modell. Det følger da at $<M,G> \models\alpha$. Fra dette og (4) følger det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m;0). **QED.**

© Morten Harboe Rognes 2008

Vi har tidligere nevnt at ethvert teorem i DM er Kripke DM-gyldig. Videre har vi fra Teorem 7.1.5 at enhver DM-gyldig formel er et teorem i DM. Fra dette og Teorem 7.3.3 følger da vårt hovedresultat:

Teorem 7.3.4 En formel α i L er Kripke DM-gyldig hvis og bare hvis den er DM-gyldig.

§8 Systemet DB. Reaksiomatisering

Det setningslogiske modalsystemet DB defineres slik: Aksiomer i systemet er for det første alle formlene i PC*. I tillegg er alle instanser av de følgende to skjemaer aksiomer i systemet:

(1) $L(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta)$
(2) $L\alpha\rightarrow M\alpha$
(3) $L(L\alpha\rightarrow\alpha)$
(4) $L(\alpha\rightarrow LM\alpha)$

Systemet har bare to slutningsregler, nemlig modus ponens:

MP $\vdash\alpha$ & $\vdash \alpha\rightarrow\beta \quad\rightarrow\quad \vdash \beta$

og det som vi her skal kalle nødvendighetsregelen:

RL $\vdash\alpha \quad\rightarrow\quad \vdash L\alpha$

Man kan definere systemet DB som den minste formelmengden X i L som inneholder alle de nevnte aksiomer og som i tillegg er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen RL.

På samme måte som de normale systemene vi har undersøkt tidligere kan systemet DB aksiomatiseres med modus ponens som eneste slutningsregel. Vi avgrenser først formelmengdene K(db0), K(db) og K(db);∞ ved den følgende definisjon

Definisjon 8.1 Vi setter:

(a) $K(db0) = PC^* \cup Mg((L\alpha\rightarrow M\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L)) \cup Mg((L(L\alpha\rightarrow\alpha)): \alpha\hat{e}Fm(L)) \cup Mg((L(\alpha\rightarrow LM\alpha)): \alpha\hat{e}Fm(L)) \cup Mg((L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L\alpha\rightarrow L\beta): \alpha,\beta\hat{e}Fm(L))$

(b) K(db) er den minste mengden X av formler i L som oppfyller de følgende krav:
  (i) K(db0) Inkl X
  (ii) Er $\delta\hat{e}$ X og er γ en vilkårlig formel i L har vi $(L\gamma \rightarrow L\delta)\hat{e}X$

(c) $K(db);\infty = K(db) \cup Mg(L(n)(\alpha\rightarrow\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L) \& n\hat{e}N)$

Systemet DB* er den minste formelmengden i X som inneholder K(db);∞ og som er lukket under modus ponens. Det er altså det systemet som har formlene i K(db);∞ som aksiomer, og der den eneste slutningsregelen er modus ponens. Vi skal vise at DB* og DB er ekvivalente. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 8.2 $(A\alpha)(\alpha\hat{e}Fm(L) \rightarrow (\alpha\hat{e}DB^* \leftrightarrow DB \vdash \alpha))$

Bevis: Beviset for denne påstanden er nøyaktig som beviset for Teorem 5.3 med visse helt opplagte endringer: Man erstatter "K(f0)" overalt med "K(db0)" samt "K(f)" og "K(f);∞" overalt med henholdsvis "K(db)" og "K(db);∞". Dessuten må alle referanser til systemene F

© Morten Harboe Rognes 2008

og F* erstattes med referanser til DB og DB*. Det eneste man behøver å peke på er at K(db0) nå også omfatter alle formler av typen Lα→Mα og L(Lα→α) samt L(α→LMα). Men disse er jo åpenbart aksiomer i DB. Omvendt har vi at Lα→Mα og L(Lα→α) samt L(α→LMα) er teoremer i DB. Men Lα→Mα er med i K(db);∞ og derfor et aksiom i DB*. Det følger da at (Lα→Mα)êDB*. Nøyaktig det samme resonnement kan brukes i forbindelse med skjemaene L(Lα→α) og L(α→LMα). **QED**

§8.1 Halvsyntaktiske modeller for DB. Gyldighetsteorem og fullstendighet

Vi har nå avgrenset systemet DB presist. Vi har også definert det korresponderende, ekvivalente systemet DB*. Det vi nå ønsker å gjøre er å tilordne dette systemet en klasse av halvsyntaktiske modeller. Dernest vil vi vise at alle teoremene i systemet holder i alle modeller i den modellklassen systemet har blitt tilordnet. Dessuten ønsker vi å vise at det motsatte holder, nemlig at dersom en formel holder i alle modellene i den modellklasse som er tilordnet F så er formelen også et teorem i systemet.

Vi avgrenser mengden av DB-modeller for språket L.

Definisjon 8.1.1 En DB-modell M for språket L er en halvsyntaktisk modell M=<Δ,R> for L som oppfyller de følgende krav:

(i) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → (αêR & (α→β)êR → βêR))
(ii) K(db);∞ Inkl R
(iii) (Aα)(αêFm(L) → αêR → ¬((¬α)êR)
(iv) (Aα)(αêFm(L)→ (Lα→α)êR
(v) (Aα)(αêFm(L) → (α→LMα)êR

Man ser altså at dersom en halvsyntaktisk modell <Δ,R> skal være en DB-modell må R være lukket under modus ponens og alle formlene i K(db);∞ være inkludert i R. Definisjonen er fullstendig analog med den tilsvarend defnsjonen vi ga i forbindelse med systemet DM. Den eneste forskjellen er at "K(dm);∞" i vår tidligere definisjon er erstattet med "K(db);∞", og at vi har føyet til klausulen (v).

En formel α i L er DB-gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver DB-modell M= <Δ,R> at αêR. Betegner vi klassen av DB-modeller med |DB|, kan denne definisjonen formaliseres slik:

Definisjon 8.1.2 Anta α er en formel i L. Da gjelder:

(i) α er DB-gyldig ↔ (AM)(Mê|DB| → αêπ;1(M))

Vi viser først det følgende gyldighetsteorem kalkylen DB:

Teorem 8.1.3 (Gyldighetsteorem). Anta α er en vilkårlig formel i L. Da gjelder:
αêDB* → α er DB-gyldig

Bevis: Beviset for dette er helt analogt med beviset for den tilsvarene sats for systemet DM, Teorem 7.1.3. Det eneste vi behøver å gjøre i tillegg, er å vise at formelen L(α→LMα) er DB-gyldig. Men denne ser man lett at må være gyldig i lys av kravet (v) i definisjonen av DB-

© Morten Harboe Rognes 2008

modell. **QED.**

De følgende teoremer, Teorem 8.1.4 - 8.1.9 er helt analoge med de tilsvarende satser for systemet DM. Det er bare små endringer som trengs i bevisene. Vi formulerer først fullstendighetsteoremet for systemet DM, dernest de enkelte følgesetningene til dette teoremet.

Teorem 8.1.4 Anta Γ er en DB-konsistent mengde av formler i L. Da finnes en modell Mê |DB| slik at Γ Inkl π;1(M)

Bevis: Beviset her blir i det vesentlige som for systemet F. I hovedsaken får man et bevis for DB om man overalt i beviset for Teorem 5.1.4 overalt erstatter "F" og "F*" med henholdsvis "DB" og "DB*", videre erstatter alle forekomster av "K(f0)", "K(f)" og "K(f);∞" med henholdsvis "K(db0)", "K(db)" og "K(db);∞". Man må imidlertid redefinere sekvensen av formelmengder <f(n)>/nêN/ som ble innført. I definisjonen av f(0) må man inkludere formlene Lα→Mα, L(Lα→α) samt L(α→LMα). Utover dette kan alt som står i beviset for Teorem 5.1.4 beholdes uendret. Man må imidlertid vise at den modellen, M= <Δ,R>, som konstrueres i beviset oppfyller kravet (iii) i Definisjon 8.1.1:

(Aα)(αêFm(L) → αêR → ¬((¬α)êR)

Man har imidlertid at DB* Inkl Δ siden Δ er en maksimalt konsistent mengde. Det følger at Lα→Mα da må være med i Δ siden (Lα→Mα)êK(db);∞ Inkl DB* Inkl Δ. Anta αêR. da har vi siden M er en halvsyntaktisk modell at LαêΔ Fra dette og det at (Lα→Mα)êΔ følger, siden Δ er en sannhetsmengde at MαêΔ Dette er ekvivalent med ¬L¬αêΔ. Fra dette og definisjonen av en halvsyntaktisk modell kan man så utlede at ¬((¬α)êR).

Dessuten må man vise at modellen M= <Δ,R>, som oppfyller kravet (iv) i Definisjon 8.1.1:

Man har imidlertid at DB* Inkl Δ siden Δ er en maksimalt konsistent mengde. Det følger at L(Lα→α) da må være med i Δ siden (L(Lα→α))êK(db);∞ Inkl DB* Inkl Δ. Men siden vi har i enhver halvsyntaktisk modell at LαêΔ ↔ αêR for alle formler α, følger det at (Lα→α)êR. Dette viser at kravet (iv) i definisjonen av DB-modell er oppfylt.

Endelig må man vise at modellen M= <Δ,R>, som oppfyller kravet iv) i Definisjon 8.1.1:

Man har imidlertid at DB* Inkl Δ siden Δ er en maksimalt konsistent mengde. Det følger at L(α→LMα) da må være med i Δ siden (L(α→LMα))êK(db);∞ Inkl DB* Inkl Δ. Men siden vi har i enhver halvsyntaktisk modell at LαêΔ ↔ αêR for alle formler α, følger det at (α→LMα)êR. Dette viser at kravet (v) i definisjonen av DB-modell er oppfylt. **QED.**

Vi anfører de følgene satser som er helt analoge med Teorem 7.1.6 - Teorem 7.1.9 uten direkte bevis. Man får imidlertid bevis for disse satsene om man i de tilsvarende bevis for systemet DM erstatter alle uttrykk som har tilknytning til DM med tilsvarende uttrykk som er definert i forbindelse med systemet DB.

Teorem 8.1.5 Anta α er en formel i L. Da gjelder:

(i) (AM)(Mê|DB| → αêπ;1(M)) → DB |-α

Teorem 8.1.6 Anta M=<Δ,R> er en DB-modell. Da har man at R er lukket under DB-konsekvens.

© Morten Harboe Rognes 2008

Teorem 8.1.7 (Kompakthetsteorem) Anta Δ er en formelmengde i L. Da har man at Δ Inkl π;(M) for en eller annen DB-modell M hvis og bare hvis man har for enhver endelig delmengde Γ av Δ at det finnes en DB-modell M' slik at Γ Inkl π;1(M').

Teorem 8.1.8 Anta Δ er en formelmengde Anta αêFm(L). Da har vi at αêπ;1(M) for alle DB -modeller M der Δ Inkl π;1(M), hvis og bare hvis det finnes formler β;1,...,β:nêΔ slik at (β;1& .... & β;n → α) er et teorem i DB

Teorem 8.1.9 Anta Δ er en formelmengde som er lukket under DB-konsekvens. Anta α er en formel i L. Da har vi at αêΔ hvis og bare hvis αêπ;1(M) for enhver DB-modell M der Δ Inkl π;1(M)

Dermed har vi anført de viktigste resultatene vi trenger om halvsyntaktiske modeller for systemet DB. Vi skal naturligvis benytte disse resultatene når vi i neste avsnitt undersøker sammenhengen mellom DB-modeller og Kripke DB-modeller.

§8.2 Kripke-modeller for DB. Gyldighetsteorem

De følgende definisjoner er helt analoge med dem som er gitt for systemet DM.[4] I Definisjon 8.2.1 er det imidlertid en forskjell fra Definisjon 7.2.1 siden vi av en Kripke DB-struktur <G,K,R> også krever at R skal skal oppfylle kravet

(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêK → (xRy&yRz → zRy)).

Dette kravet må pålegges Kripke-modellene for systemet DB for at vi skal bli istand til å vise at skjemaet L(α→LM) er gyldig. Vi gir her definisjonene uten ytterligere forklaringer.

Definisjon 8.2.1 (a) En *Kripke DB-struktur* er et ordnet triple <G,K,R> som oppfyller de følgende krav: (i) K er en ikke-tom mengde. (ii) G er et element i K (iii) R er en relasjon over K som oppfyller følgende krav:

(i) (Ax)(xêK → (Ey)(yêK & xRy))
(ii) (Ax)(Ay)(x,yêK → (xRy → yRy))
(iii) (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêK → (xRy&yRz → zRy)).

Definisjon 8.2.2 Med *en verditilordning φ assosiert med strukturen <G,K,R>*, der K er en ikke-tom mengde, G et element i K og R en relasjon over K, forstår vi en funksjon φ som til enhver setningsvariabel p i L tilordner en delmengde av K

4 La X være et av de seks modalsystemene vi studerer her. I forbindelse med disse systemene definerer vi hva som menes med en Kripke X-struktur, en verditilordning assosiert med en Kripke X-struktur, Kripke X-modell og hva som menes med at en formel er sann i en Kripke X-modell ved en mulig verden i denne modellen. Selve formuleringen av disse definisjonene er ikke fullstendig identiske med de tilsvarende definisjoner som gis i Hanson [1], side 179-180, men de er tilpasninger av Hansons definisjoner til vår sammenheng. I det vesentlige kan de sies å være Hansons definisjoner. Det bør nevnes at vår definisjon av Kripke DB-struktur avviker fra Hansons. Vi krever at alternativrelasjonen over K i en DB-modellstruktur <G,K,R> skal oppfylle de kravene som er nevnt i Definisjon 8.2.1. Hanson krever imidlertid at R skal være refleksiv over K-{G} og symmetrisk over K-{G}. Dette krav er ikke identisk med kravene (ii) og (iii) i Definisjon 8.2.1. Bruker man kravet til Hanson må man kreve at ¬(GRG) i forbindelse med Kripke DB-modellene. Dette er tilsynelatende ikke nødvendig i forbindelse med de andre systemene. Se fotnote 8 på side 183 i Hanson [1].

© Morten Harboe Rognes 2008

Definisjon 8.2.3 Men *Kripke DB-modell for L* forstås en struktur <φ,G,K,R> der <G,K,R> er en Kripke DB -struktur og φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R>.

Definisjon 8.2.4 La M= <φ,G,K,R> være en Kripke DB-modell for L, w et element i K og α en formel i L. Da defineres "α er sann i verdenen w i modellen M", i symboler "<M,w> ⊨ α" induktivt på lengden av α slik:

(i) Er p en setningsvariabel i L setter vi:
<M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p)

(ii) Er α,β formler i L setter vi:
<M,w> ⊨ (α → β) ↔ (<M,w> ⊨ α → <M,w> ⊨ β)

(iii) Er α en formel i L setter vi:
<M,w> ⊨ Lα ↔ (Aw')(w'êK & wRw' → <M,w'> ⊨ α)

Etter disse forberedelsene kan vi nå definere hva som menes med at en formel er Kripke DB-gyldig. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 8.2.5 Anta αêFm(L). Da sier vi at α er Kripke DB -gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver Kripke DB-modell M= <φ,G,K,R> at <M,G> ⊨ α

Det er en relativt enkel sak å vise at den følgende sats holder.

Teorem 8.2.6 Anta α er en formel i L. Er α et teorem i DB har vi at α er Kripke DB -gyldig.

Bevis: Vi skal ikke gi noe fullstendig bevis for denne satsen. Det er meget enkelt å vise at de setningslogisk gyldige formlene i L er Kripke DB-gyldige og at skjemaene L(α→β)→ Lα→Lβ og Lα→Mα er Kripke DB-gyldige. Det er også lett å vise at modus ponens er en slutningsregel som bevarer gyldighet. Dessuten har vi i §7 vist hvordan man viser at nødvendighetsregelen er gyldig og vist at L(Lα→α) er gylig i alle Kripke DM-modeller. Beviset for dette kan nesten uten noen forandringer overføres til systemet DB. Det eneste vi derfor vil gjøre er å vise at skjemaet L(α→LMα) er Kripke DB-gyldig. Anta derfor at M=<φ,G,K,R> er en vilkårlig Kripke DB-modell. Anta w er et vilkårlig element i K slik at (1) GRw. Det vil være tilstrekkelig å vise at
<M,w> ⊨ α→LMα. For å vise dette vil det være tilstrekkelig å vise:
<M,w> ⊨ α → <M,w> ⊨ LMα. I sin tur vil det derfor være tilstrekkelig å vise:
<M,w> ⊨ α → (Aw')(w'êK & wRw' → <M,w'> ⊨ Mα). I sin tur vil dette åpenbart være implisert av: (2) <M,w> ⊨ α → (Aw')(w'êK & wRw' → (Ew")(w"êK& w'Rw" & <M,w"> ⊨ α)).

Vi viser at (2) holder: Anta (3) <M,w> ⊨ α og for vilkårlig w' at (4) w'êK & wRw'. Siden R oppfyller kravet (iii) i Definisjon 8.3.1 har vi, siden GRw & wRw', at (5) w'Rw. Men fra dette og (3) følger: (Ew")(w"êK& w'Rw" & <M,w"> ⊨ α)). Dette viser at (2) holder. I sin tur viser dette at <M,w> ⊨ α→LMα. Men siden w var vilkårlig element der GRw har vi <M,G> ⊨ L(α→LMα). Men M var en vilkårlig Kripke DB-modell. Det følger at skjemaet L(α→LMα) er gyldig. **QED.**

© Morten Harboe Rognes 2008

§8.3 Om sammenhengen mellom DB-modeller og Kripke DB-modeller.

Vi skal nå gå nærmere inn på sammenhengen mellom DB-modeller og den type modeller som har blitt definert i forrige paragraf, nemlig Kripke DB-modeller. Vårt viktigste resultat i dette avsnittet er at dersom en formel α er Kripke DB-gyldig så er den også DB-gyldig. Siden Teorem 8.2.6 sier at ethvert teorem i DB er Kripke DB-gyldig og vi tidligere har vist at enhver DB-gyldig formel er et teorem i DB (Teorem 8.1.5) følger det at enhver formel er Kripke DB-gyldig hvis og bare hvis den er DB-gyldig. De to gyldighetsbegrepene faller derfor sammen. Sammen med vårt tidligere fullstendighetsbevis gir resultatene i dette avsnittet en også et nytt fullstendighetsbevis for at DB er fullstendig med hensyn på Kripke DB-gyldighet.

Vi minner om at vi her betegner mengden av alle halvsyntaktiske DB-modeller med |DB|. Vi definerer en relasjon μ mellom DB-modeller ved å sette at <m,m'>êμ hvis og bare hvis m,m' ê|DB| og vi dessuten har at π;2(m) Inkl π;1(m'). Holder <m,m'>êμ sier vi at DB-modellen m' *er underordnet* modellen m. Er m en DB-modell betegner Γ(m) den minste delmengden X av |DB| der vi har at mêX og hvor vi dessuten har for alle DB-modeller m,m' at dersom mêX og m' er underordnet m så er også m'êX.

Vi definerer dessuten, om m er en DB-modell, relasjonen R;m Inkl |D|X|D| ved å sette:

(+) R;m = (μ) Ω (Γ(m)XΓ(m))

Man ser fra dette at R;m er en relasjon over Γ(m). I tillegg må m;1,m,2 være med i Γ(m). På dette punkt må vi imidlertid vise at relasjonen R;m er seriell, betinget refleksiv og betinget symmetrisk for at den skal oppfylle kravene til alternativrelasjonen i en Kripke DM-struktur. Det er med andre ord nødvendig å bevise det følgende.

(i) (Am)(mê|DB| → (Em')(m'ê|DB| & mμm')
(ii) m,m'ê|DB| → mμm' → m'μm'
(iii) m,m',m'' ê|DB| → mμm' & m'μm'' → m''μm'

De to første påstandene bevises nøyaktig på samme måte som i §7.3 i forbindelse med systemet DM. Det er derfor bare nødvendig å gi et bevis for (iii) her.

Anta (1) m,m',m'' ê|DB| og (2) mμm' & m'μm''. Ved hjelp av definisjonen av μ følger fra dette: (3) π;2(m) Inkl π;1(m') og (4) π;2(m') Inkl π;1(m''). Det vil være tilstrekkelig å vise at π;2(m'') Inkl π;1(m'). Anta for reduktio ad absurdum at dette ikke holder. Da finnes det en formel α alik at (5) αêπ;2(m'') & ¬(αêπ;1(m'). Nå har man at m er en DB-modell. Vi har derfor at (6) L(¬α→L¬Lα)êπ;1(m). Vi har at følgende gjelder for alle halvsyntaktiske modeller a: (#) (Aβ)(βêFm(L) → Lβêπ;1(a) ↔ βêπ;2(a)). Fra dette og (6) følger:

(8) (¬α→L¬Lα)êπ;2(m). Fra dette og (3) følger i sin tur (9) (¬α→L¬Lα)êπ;1(m') Fra den andre konjunkten i (5) følger, siden π;1(m') er en sannhetsmengde, at (¬α)êπ;1(m'). Fra dette og (9) følger (10) L¬Lαêπ;1(m'). Herav har vi så ved hjelp av (#) ¬Lαêπ;2(m'). Fra dette og (4) følger så (11) ¬Lαêπ;1(m''). På den annen side følger fra (#) og den første konjunkten i (5) at
Lαêπ;1(m''). Dette strider åpenbart mot (11). Det følger at dt ikke kan finnes noen formel α slik at (5) holder. Vi har derfor π;2(m'') Inkl π;1(m').

Vi går nå videre å beviser den følgende sats:

Teorem 8.3.1 Anta m;0 er en DB-modell. Anta videre at mêΓ(m;0). Da har vi
Lαê π;1(m) ↔ (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m'))

© Morten Harboe Rognes 2008

Bevis: Anta (1) at m;0 er en DB-modell og (2) mêΓ(m;0).

(a) Vi gir først et bevis for kondisjonalen mot høyre. Anta derfor (3) Lαêπ;1(m) og (4) m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0). Fra det siste følger at m' er underordnet m. Da har vi per definisjon at (5) π;2(m) Inkl π;1(m').

Siden m er en DB-modell, og derfor en halvsyntaktisk modell, oppfyller den kravet: (6) (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (3) følger αêπ;2(m). herav har vi så ved hjelp av (5) det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m').

Dette viser at kondisjonalen mot høyre holder.

(b) Vi tar så for oss kondisjonalen mot venstre. Anta

(6) (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m')) Fra dette følger:

(7) (Am')(m'ê|DB| & <m,m'>êμ → αêπ;1(m')) Dette innebærer i sin tur at

(8) (Am')(m'ê|DB| & π;2(m) Inkl π;1(m') → αêπ;1(m'))

Men siden m er en DB-modell er π;2(m) lukket under DB-konsekvens i henhold til Teorem 8.1.6. Fra dette forhold, (8) og Teorem 8.1.9 kan vi slutte at (9) αêπ;2(m). Men siden m er en DB-modell oppfyller den kravet: (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (9) følger derfor det vi ønsker: Lαêπ;1(m).

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Det neste teoremet er avgjørende for å kunne vise at DB-gyldighet er ekvivalent med Kripke DB-gyldighet.

Teorem 8.3.2 Anta m;0 er et vilkårlig element i |DB|. Sett per definisjon:

(i) G= m;0

(ii) K= Γ(m;0) og

(iii) R = R;(m;0)

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))

Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi:

(a) M er en Kripke DB-modell

(b) Er da α en vilkårlig formel i L har vi:

(Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w)))

Bevis: (a) Det skulle være temmelig opplagt at <G,K,R> er en Kripke DB-modellstruktur. Man har at G=m;0êΓ(m;0)=K i lys av definisjonen av operasjonen Γ. Videre skulle det være klart at R;(m;0) er en seriell relasjon over K=Γ(m;0) i lys av definisjonen av R;m. Det fremgår også fra det vi beviste ovenfor at <G,K,R> oppfyller det andre kravet i definisjonen vi ga av en Kripke DB-modellstruktur. Det skulle heller ikke være vanskelig å se, i lys av det vi beviste før vi presenterte Teorem 8.3.1 at R er betinget symmetrisk. Man innser også lett på basis av definisjonen (iv) i teoremet at φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R> når man studerer Definisjon 7.2.2. Det følger derfor at M=<φ,G,K,R> er en Kripke DB-modell.

(b) Vi beviser dette ved induksjon på lengden av formler i L. Anta w er et vilkårlig element i K. Da har vi wêΓ(m;0).

(i) Er α en setningsvariabel p har vi at

<M,w> ⊨ α ↔ <M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p) ↔ pêπ;1(w)

(ii) Er α = ¬β for en eller annen formel β har vi:

© Morten Harboe Rognes 2008

$<M,w> \models \neg\beta \leftrightarrow \neg(<M,w> \models \beta)$
$\leftrightarrow \neg(\beta\hat{e}\pi;1(w))$ (Her benytter vi induksjonshypotesen)
$\leftrightarrow (\neg\beta)\hat{e}\pi;1(w)$ (Siden $\pi;1(w)$ er en sannhetsmengde)
$\leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w)$

(iii) Er $\alpha=(\beta\rightarrow\gamma)$ for visse formler β,γ har vi:

$<M,w> \models (\beta\rightarrow\gamma) \leftrightarrow (<M,w> \models \beta \rightarrow <M,w> \models \gamma)$
$\leftrightarrow (\beta\hat{e}\pi;1(w) \rightarrow \gamma\hat{e}\pi;1(w))$ (Etter induksjonshypotese)
$\leftrightarrow (\beta\rightarrow\gamma)\hat{e}\pi;1(w)$ ($\pi;1(w)$ er en sannhetsmengde)
$\leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w)$

(iv) Er $\alpha = L\beta$ for en eller annen formel β har vi:

$<M,w> \models L\beta \leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}K \,\&\, <w,w'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow <M,w'> \models \alpha)$
$\leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, <w,w'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w')$

Men i ved hjelp av Teorem 8.3.1 har vi:

$(Aw')(w'\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, <w,w'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w')) \leftrightarrow L\alpha\hat{e}\pi;1(w)$

Det følger at $<M,w> \models L\beta \leftrightarrow L\alpha\hat{e}\pi;1(w)$.

Dette viser at punkt (b) i teoremet holder. **QED.**

Ved hjelp av Teorem 8.3.2 er det nå lett å vise:

Teorem 8.3.3 Anta α er en formel i L. Er da α Kripke DB-gyldig er α også DB-gyldig.

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L. Anta (1) at α er Kripke DB-gyldig. Anta nå at (2) m;0 er en vilkårlig DB-modell. Det vil vil være tilstrekkelig å bevise at $\alpha\hat{e}\pi;1(m;0)$. Definer en Kripke DB-modell $M=<\varphi,G,K,R>$ på nøyaktig samme måte som i Teorem 8.3.2. Det vil si, sett per definisjon:

(i) $G= m;0$
(ii) $K= \Gamma(m;0)$ og
(iii) $R = R;(m;0)$

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) $\varphi(p) = Mg(m: m\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, p\hat{e}\pi;1(m))$

Sett tilslutt (v) $M= <\varphi, G,K,R>$. Da har vi i lys av Teorem 8.3.2 at:

(3) $(Aw)(w\hat{e}K \rightarrow (<M,w> \models \alpha \leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w)))$ herav:
(4) $<M,G> \models \alpha \leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(G) \leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(m;0)$

Men α er etter (1) Kripke DB-gyldig og M er en Kripke DB-modell. Det følger da at $<M,G> \models\alpha$. Fra dette og (4) følger det vi ønsker, nemlig: $\alpha\hat{e}\pi;1(m;0)$. **QED.**

Vi har tidligere nevnt at ethvert teorem i DB er Kripke DB-gyldig. Videre har vi fra Teorem 8.1.5 at enhver DB-gyldig formel er et teorem i DB. Fra dette og Teorem 8.3.3 følger da vårt hovedresultat:

Teorem 8.3.4 En formel α i L er Kripke DB-gyldig hvis og bare hvis den er DB-gyldig.

§9 Systemet DS4. Reaksiomatisering

Det setningslogiske modalsystemet DS4 defineres slik: Aksiomer i systemet er for det første alle formlene i PC*. I tillegg er alle instanser av de følgende to skjemaer

© Morten Harboe Rognes 2008

aksiomer i systemet:

(1) $L(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta)$
(2) $L\alpha\rightarrow M\alpha$
(3) $L(L\alpha\rightarrow\alpha)$
(4) $L\alpha \rightarrow LL\alpha$

Systemet har bare to slutningsregler, nemlig modus ponens:

MP $\vdash\alpha$ & $\vdash \alpha\rightarrow\beta \quad \rightarrow \vdash \beta$

og det som vi her skal kalle nødvendighetsregelen:

RL $\vdash\alpha \quad \rightarrow \quad \vdash L\alpha$

Man kan definere systemet DS4 som den minste formelmengden X i L som inneholder alle de nevnte aksiomer og som i tillegg er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen RL.

På samme måte som de normale systemene vi har undersøkt tidligere kan systemet DS4 aksiomatiseres med modus ponens som eneste slutningsregel. Vi avgrenser først formelmengdene K(s0), K(s) og K(s);∞ ved den følgende definisjon

Definisjon 9.1 Vi setter:

(a) $K(s0) = PC^* \cup Mg((L\alpha\rightarrow M\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L)) \cup Mg((L(L\alpha\rightarrow\alpha)): \alpha\hat{e}Fm(L)) \cup Mg((L\alpha\rightarrow LL\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L)) \cup Mg((L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L\alpha\rightarrow L\beta): \alpha,\beta\hat{e}Fm(L))$

(b) K(s) er den minste mengden X av formler i L som oppfyller de følgende krav:
  (i) K(s) Inkl X
  (ii) Er $\delta\hat{e}$ X og er γ en vilkårlig formel i L har vi $(L\gamma \rightarrow L\delta)\hat{e}X$

(c) $K(s);\infty = K(db) \cup Mg(L(n)(\alpha\rightarrow\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L)$ & $n\hat{e}N)$

Systemet DS4* er den minste formelmengden i X som inneholder K(s);∞ og som er lukket under modus ponens. Det er altså det systemet som har formlene i K(s);∞ som aksiomer, og der den eneste slutningsregelen er modus ponens. Vi skal vise at DS4* og DS4 er ekvivalente. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 9.2 $(A\alpha)(\alpha\hat{e}Fm(L) \rightarrow (\alpha\hat{e}DS4^* \leftrightarrow DS4 \vdash \alpha))$

Bevis: Beviset for denne påstanden er nøyaktig som beviset for Teorem 5.3 med visse helt opplagte endringer: Man erstatter "K(f0)" overalt med "K(s0)" samt "K(f)" og "K(f);∞" overalt med henholdsvis "K(s)" og "K(s);∞". Dessuten må alle referanser til systemene F og F* erstattes med referanser til DS4 og DS4*. Det eneste man behøver å peke på er at K(s0) nå også omfatter alle formler av typen $L\alpha\rightarrow M\alpha$ og $L(L\alpha\rightarrow\alpha)$ samt $L\alpha\rightarrow LL\alpha$. Men disse er jo åpenbart aksiomer i DS4. Omvendt har vi at $L\alpha\rightarrow M\alpha$, $L(L\alpha\rightarrow\alpha)$ samt $L\alpha\rightarrow LL\alpha$) er teoremer i DS4. Men $L\alpha\rightarrow M\alpha$, $L(L\alpha\rightarrow\alpha)$ og $L(\alpha\rightarrow LM\alpha)$ er med i K(s);∞ og derfor aksiomer i DS4*. Det følger da at de alle er teoremer i DS4*. **QED**

§9.1 Halvsyntaktiske modeller for DS4. Gyldighetsteorem og fullstendighet

Vi har nå avgrenset systemet DS4 presist. Vi har også definert det korresponderende, ekvivalente systemet DS4*. Det vi nå ønsker å gjøre er å tilordne dette systemet en klasse av

© Morten Harboe Rognes 2008

halvsyntaktiske modeller. Dernest vil vi vise at alle teoremene i systemet holder i alle modeller i den modellklassen systemet har blitt tilordnet. Dessuten ønsker vi å vise at det motsatte holder, nemlig at dersom en formel holder i alle modellene i den modellklasse som er tilordnet F så er formelen også et teorem i systemet.

Vi avgrenser mengden av DS4-modeller for språket L.

Definisjon 9.1.1 En DS4-modell M for språket L er en halvsyntaktisk modell M=<Δ,R> for L som oppfyller de følgende krav:

(i) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow (\alpha \hat{e} R \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} R \rightarrow \beta \hat{e} R))$

(ii) $K(s);\infty$ Inkl R

(iii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow \alpha \hat{e} R \rightarrow \neg((\neg\alpha) \hat{e} R)$

(iv) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (L\alpha \rightarrow \alpha) \hat{e} R$

(v) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (\alpha \hat{e} R \rightarrow L\alpha \hat{e} R)$

Man ser altså at dersom en halvsyntaktisk modell <Δ,R> skal være en DS4-modell må R være lukket under modus ponens og alle formlene i K(db);∞ være inkludert i R. Definisjonen er fullstendig analog med den tilsvarend definsjonen vi ga i forbindelse med systemet DB. Den eneste forskjellen er at "K(db);∞" i vår tidligere definisjon er erstattet med "K(s);∞", og at vi har endret klausulen (v).

En formel α i L er DS4-gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver DS4-modell M= <Δ,R> at $\alpha \hat{e} R$. Betegner vi klassen av DS4-modeller med |DS4|, kan denne definisjonen formaliseres slik:

Definisjon 9.1.2 Anta α er en formel i L. Da gjelder:

(i) α er DS4-gyldig $\leftrightarrow (AM)(M \hat{e} |DS4| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M))$

Vi viser først det følgende gyldighetsteorem kalkylen DS4:

Teorem 9.1.3 (Gyldighetsteorem). Anta α er en vilkårlig formel i L. Da gjelder:

$\alpha \hat{e} DS4^* \rightarrow \alpha$ er DS4-gyldig

Bevis: Beviset for dette er helt analogt med beviset for den tilsvarene sats for systemet DM, Teorem 7.1.3. Det eneste vi behøver å gjøre i tillegg, er å vise at formelen $L\alpha \rightarrow LL\alpha$ er DS4-gyldig. Men dette ser man lett av kravet (v) i definisjonen av DS4-modell. **QED.**

De følgende teoremer, Teorem 9.1.4 - 9.1.9 er helt analoge med de tilsvarende satser for systemet DB. Det er bare små endringer som trengs i bevisene. Vi formulerer først fullstendighetsteoremet for systemet DS4, dernest de enkelte følgesetningene til dette teoremet.

Teorem 9.1.4 Anta Γ er en DS4-konsistent mengde av formler i L. Da finnes en modell $M \hat{e} |DS4|$ slik at Γ Inkl $\pi;1(M)$

Bevis: Beviset her blir i det vesentlige som for systemet F. I hovedsaken får man et bevis for DS4 om man overalt i beviset for Teorem 5.1.4 overalt erstatter "F" og "F*" med henholdsvis "DS4" og "DS4*", videre erstatter alle forekomster av "K(f0)", "K(f)" og "K(f);∞" med

© Morten Harboe Rognes 2008

henholdsvis "K(s0)", "K(s)" og "K(s);∞". Man må imidlertid redefinere sekvensen av formelmengder <f(n)>/nêN/ som ble innført. I definisjonen av f(0) må man inkludere formlene Lα→Mα, L(Lα→α) samt Lα→LLα. Utover dette kan alt som står i beviset for Teorem 5.1.4 beholdes uendret. Man må imidlertid vise at den modellen, M= <Δ,R>, som konstrueres i beviset oppfyller kravet (iii) i Definisjon 9.1.1:

(Aα)(αêFm(L) → αêR → ¬((¬α)êR)

Dette kan man gjøre på nøyaktig samme måte som i det tilsvarende beviset for systemet DB.

Dessuten må man vise at modellen M= <Δ,R>, som oppfyller kravet (iv) i Definisjon 9.1.1:

Man har imidlertid at DS4* Inkl Δ siden Δ er en maksimalt konsistent mengde. Det følger at L(Lα→α) da må være med i Δ siden (L(Lα→α))êK(db);∞ Inkl DS4* Inkl Δ. Men siden vi har i enhver halvsyntaktisk modell at LαêΔ ↔ αêR for alle formler α, følger det at (Lα→α)êR. Dette viser at kravet (iv) i definisjonen av DS4-modell er oppfylt.

Endelig må man vise at modellen M= <Δ,R>, som oppfyller kravet iv) i Definisjon 9.1.1:

Man har at DS4* Inkl Δ, siden Δ er en maksimalt konsistent mengde. Det følger at Lα→LLα da må være med i Δ siden (Lα→LLα)êK(s);∞ Inkl DS4* Inkl Δ. Men siden vi har i enhver halvsyntaktisk modell at LαêΔ ↔ αêR for alle formler α, følger det at αêR→LαêR. Dette viser at kravet (v) i definisjonen av DS4-modell er oppfylt. **QED.**

Vi anfører de følgene satser som er helt analoge med Teorem 8.1.6 - Teorem 8.1.9 uten direkte bevis. Man får imidlertid bevis for disse satsene om man i de tilsvarende bevis for systemet DB erstatter alle uttrykk som har tilknytning til DB med tilsvarende uttrykk som er definert i forbindelse med systemet DS4.

Teorem 9.1.5 Anta α er en formel i L. Da gjelder:

(i) (AM)(Mê|DS4| → αêπ;1(M)) → DS4 |-α

Teorem 9.1.6 Anta M=<Δ,R> er en DS4-modell. Da har man at R er lukket under DS4-konsekvens.

Teorem 9.1.7 (Kompakthetsteorem) Anta Δ er en formelmengde i L. Da har man at Δ Inkl π;(M) for en eller annen DS4-modell M hvis og bare hvis man har for enhver endelig delmengde Γ av Δ at det finnes en DS4-modell M' slik at Γ Inkl π;1(M').

Teorem 9.1.8 Anta Δ er en formelmengde Anta αêFm(L). Da har vi at αêπ;1(M) for alle DS4 -modeller M der Δ Inkl π;1(M), hvis og bare hvis det finnes formler β;1,...,β:nêΔ slik at (β;1& .... & β;n → α) er et teorem i DS4

Teorem 9.1.9 Anta Δ er en formelmengde som er lukket under DS4-konsekvens. Anta α er en formel i L. Da har vi at αêΔ hvis og bare hvis αêπ;1(M) for enhver DS4-modell M der Δ Inkl π;1(M)

Dermed har vi anført de viktigste resultatene vi trenger om halvsyntaktiske modeller for systemet DS4. Vi skal naturligvis benytte disse resultatene når vi i neste avsnitt undersøker sammenhengen mellom DS4-modeller og Kripke DS4-modeller.

© Morten Harboe Rognes 2008

§9.2 Kripke-modeller for DS4. Gyldighetsteorem

De følgende definisjoner er helt analoge med dem som er gitt for systemet DM. I Definisjon 8.2.1 er det imidlertid en forskjell fra Definisjon 7.2.1 siden vi av en Kripke DS4-struktur <G,K,R> også krever at R skal være transitiv, dvs. oppfylle kravet

(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêK → (xRy&yRz → xRz)).

Dette kravet må pålegges Kripke-modellene for systemet DS4 for at vi skal bli istand til å vise at skjemaet Lα→LLα er gyldig. Vi gir her definisjonene uten ytterligere forklaringer.

Definisjon 9.2.1 (a) En *Kripke DS4-struktur* er et ordnet triple <G,K,R> som oppfyller de følgende krav: (i) K er en ikke-tom mengde. (ii) G er et element i K (iii) R er en relasjon over K som oppfyller følgende krav:

(i) (Ax)(xêK → (Ey)(yêK & xRy))
(ii) (Ax)(Ay)(x,yêK → (xRy → yRy))
(iii) (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêK → (xRy&yRz → xRz)).

Definisjon 9.2.2 Med *en verditilordning φ assosiert med strukturen <G,K,R>*, der K er en ikke-tom mengde, G et element i K og R en relasjon over K, forstår vi en funksjon φ som til enhver setningsvariabel p i L tilordner en delmengde av K

Definisjon 9.2.3 Men *Kripke DS4-modell for L* forstås en struktur <φ,G,K,R> der <G,K,R> er en Kripke DS4 -struktur og φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R>.

Definisjon 9.2.4 La M= <φ,G,K,R> være en Kripke DS4-modell for L, w et element i K og α en formel i L. Da defineres "α er sann i verdenen w i modellen M", i symboler "<M,w> ⊨ α" induktivt på lengden av α slik:

(i) Er p en setningsvariabel i L setter vi:
<M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p)
(ii) Er α,β formler i L setter vi:
<M,w> ⊨ (α → β) ↔ (<M,w> ⊨ α → <M,w> ⊨ β)
(iii) Er α en formel i L setter vi:
<M,w> ⊨ Lα ↔ (Aw')(w'êK & wRw' → <M,w'> ⊨ α)

Etter disse forberedelsene kan vi nå definere hva som menes med at en formel er Kripke DS4-gyldig. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 9.2.5 Anta αêFm(L). Da sier vi at α er Kripke DS4 -gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver Kripke DS4-modell M= <φ,G,K,R> at <M,G> ⊨ α

Det er en relativt enkel sak å vise at den følgende sats holder. Vi skal imilertid ta for oss noen trinn i beviset:

Teorem 9.2.6 Anta α er en formel i L. Er α et teorem i DS4 har vi at α er Kripke DS4 -gyldig.

© Morten Harboe Rognes 2008

§9.3 Om sammenhengen mellom DS4-modeller og Kripke DS4-modeller.

Vi skal nå gå nærmere inn på sammenhengen mellom DS4-modeller og den type modeller som har blitt definert i forrige paragraf, nemlig Kripke DS4-modeller. Vårt viktigste resultat i dette avsnittet er at dersom en formel α er Kripke DS4-gyldig så er den også DS4-gyldig. Siden Teorem 8.2.6 sier at ethvert teorem i DS4 er Kripke DS4-gyldig og vi tidligere har vist at enhver DS4-gyldig formel er et teorem i DS4 (Teorem 9.1.5) følger det at enhver formel er Kripke DS4-gyldig hvis og bare hvis den er DS4-gyldig. De to gyldighetsbegrepene faller derfor sammen. Sammen med vårt tidligere fullstendighetsbevis gir resultatene i dette avsnittet en også et nytt fullstendighetsbevis for at DS4 er fullstendig med hensyn på Kripke DS4-gyldighet.

Vi minner om at vi her betegner mengden av alle halvsyntaktiske DS4-modeller med |DS4|. Vi definerer en relasjon μ mellom DS4-modeller ved å sette at <m,m'>êμ hvis og bare hvis m,m' ê|DS4| og vi dessuten har at π;2(m) Inkl π;1(m'). Holder <m,m'>êμ sier vi at DS4-modellen m' *er underordnet* modellen m. Er m en DS4-modell betegner Γ(m) den minste delmengden X av |DS4| der vi har at mêX og hvor vi dessuten har for alle DS4-modeller m,m' at dersom mêX og m' er underordnet m så er også m'êX.

Vi definerer dessuten, om m er en DS4-modell, relasjonen R;m Inkl |D|X|D| ved å sette:

(+) R;m = (μ) Ω (Γ(m)XΓ(m))

Man ser fra dette at R;m er en relasjon over Γ(m). I tillegg må m;1,m,2 være med i Γ(m). På dette punkt må vi imidlertid vise at relasjonen R;m er seriell, betinget refleksiv og transitiv for at den skal oppfylle kravene til alternativrelasjonen i en Kripke DS4-struktur. Det er med andre ord nødvendig å bevise det følgende.

(i) (Am)(mê|DS4| → (Em')(m'ê|DS4| & mμm')
(ii) m,m'ê|DS4| → mμm' → m'μm'
(iii) m,m',m'' ê|DS4| → mμm' & m'μm'' → mμm''

De to første påstandene bevises nøyaktig på samme måte som i §7.3 i forbindelse med systemet DM. Det er derfor bare nødvendig å gi et bevis for (iii) her.

Anta (1) m,m',m'' ê|DS4| og (2) mμm' & m'μm''. Ved hjelp av definisjonen av μ følger fra dette: (3) π;2(m) Inkl π;1(m') og (4) π;2(m') Inkl π;1(m''). Det vil være tilstrekkelig å vise at π;2(m) Inkl π;1(m''). Anta for reduktio ad absurdum at dette ikke holder. Da finnes det en formel α alik at (5) αêπ;2(m) & ¬(αêπ;1(m''). Siden m er en DS4 modell har vi at at den oppfyller kravet (v) i Definisjon 9.1.1. Dette sier at (Aα)(αêπ;2(m) → LαêΠ;2(m)). Fra dette og (5) følger: (6) LαêΠ;1(m'). Men da må vi ha siden m' er en halvsyntaktisk modell at
(7) αêπ;2(m'). Fra dette og (4) følger αêπ;1(m''). Men dette strider mot den andre konjunkten i (5). Det kan følgelig ikke finnes noen α som oppfyller kravet (5). Det følger at π;2(m) Inkl π;1(m'') og derfor at mμm''.

Vi går nå videre å beviser den følgende sats:

Teorem 9.3.1 Anta m;0 er en DS4-modell. Anta videre at mêΓ(m;0). Da har vi
Lαê π;1(m) ↔ (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m'))

Bevis: Anta (1) at m;0 er en DS4-modell og (2) mêΓ(m;0).

© Morten Harboe Rognes 2008

(a) Vi gir først et bevis for kondisjonalen mot høyre. Anta derfor (3) Lαêπ;1(m) og (4) m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0). Fra det siste følger at m' er underordnet m. Da har vi per definisjon at (5) π;2(m) Inkl π;1(m').

Siden m er en DS4-modell, og derfor en halvsyntaktisk modell, oppfyller den kravet: (6) (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (3) følger αêπ;2(m). herav har vi så ved hjelp av (5) det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m').

Dette viser at kondisjonalen mot høyre holder.

(b) Vi tar så for oss kondisjonalen mot venstre. Anta

(6) (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m')) Fra dette følger:

(7) (Am')(m'ê|DS4| & <m,m'>êμ → αêπ;1(m')) Dette innebærer i sin tur at

(8) (Am')(m'ê|DS4| & π;2(m) Inkl π;1(m') → αêπ;1(m'))

Men siden m er en DS4-modell er π;2(m) lukket under DS4-konsekvens i henhold til Teorem 8.1.6. Fra dette forhold, (8) og Teorem 8.1.9 kan vi slutte at (9) αêπ;2(m). Men siden m er en DS4-modell oppfyller den kravet: (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (9) følger derfor det vi ønsker: Lαêπ;1(m).

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Det neste teoremet er avgjørende for å kunne vise at DS4-gyldighet er ekvivalent med Kripke DS4-gyldighet.

Teorem 9.3.2 Anta m;0 er et vilkårlig element i |DS4|. Sett per definisjon:

(i) G= m;0

(ii) K= Γ(m;0) og

(iii) R = R;(m;0)

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))

Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi:

(a) M er en Kripke DS4-modell

(b) Er da α en vilkårlig formel i L har vi:

(Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w)))

Bevis: (a) Det skulle være temmelig opplagt at <G,K,R> er en Kripke DS4-modellstruktur. Man har at G=m;0êΓ(m;0)=K i lys av definisjonen av operasjonen Γ. Videre skulle det være klart at R;(m;0) er en seriell relasjon over K=Γ(m;0) i lys av definisjonen av R;m. Det fremgår også fra det vi beviste ovenfor at <G,K,R> oppfyller det andre kravet i definisjonen vi ga av en Kripke DS4-modellstruktur. Det skulle heller ikke være vanskelig å se, i lys av det vi beviste før vi presenterte Teorem 9.3.1 at R er transitiv. Man innser også lett på basis av definisjonen (iv) i teoremet at φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R> når man studerer Definisjon 9.2.2. Det følger derfor at M=<φ,G,K,R> er en Kripke DS4-modell.

(b) Vi beviser dette ved induksjon på lengden av formler i L. Anta w er et vilkårlig element i K. Da har vi wêΓ(m;0).

(i) Er α en setningsvariabel p har vi at

<M,w> ⊨ α ↔ <M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p) ↔ pêπ;1(w)

(ii) Er α = ¬β for en eller annen formel β har vi:

<M,w> ⊨ ¬β ↔ ¬(<M,w> ⊨ β)

↔ ¬(βêπ;1(w)) (Her benytter vi induksjonshypotesen)

↔ (¬β)êπ;1(w) (Siden π;1(w) er en sannhetsmengde)

© Morten Harboe Rognes 2008

$\leftrightarrow$ $\alpha\hat{e}\pi;1(w)$

(iii) Er $\alpha=(\beta\rightarrow\gamma)$ for visse formler β,γ har vi:

$<M,w> \models (\beta\rightarrow\gamma) \leftrightarrow (<M,w> \models \beta \rightarrow <M,w> \models \gamma)$

$\leftrightarrow$ $(\beta\hat{e}\pi;1(w) \rightarrow \gamma\hat{e}\pi;1(w))$ (Etter induksjonshypotese)

$\leftrightarrow$ $(\beta\rightarrow\gamma)\hat{e}\pi;1(w)$ ($\pi;1(w)$ er en sannhetsmengde)

$\leftrightarrow$ $\alpha\hat{e}\pi;1(w)$

(iv) Er $\alpha = L\beta$ for en eller annen formel β har vi:

$<M,w> \models L\beta \leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}K \,\&\, <w,w'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow <M,w'> \models \alpha)$

$\leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, <w,w'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w')$

Men i ved hjelp av Teorem 9.3.1 har vi:

$(Aw')(w'\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, <w,w'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w')) \leftrightarrow L\alpha\hat{e}\pi;1(w)$

Det følger at $<M,w> \models L\beta \leftrightarrow L\alpha\hat{e}\pi;1(w)$.

Dette viser at punkt (b) i teoremet holder. **QED.**

Ved hjelp av Teorem 9.3.2 er det nå lett å vise:

Teorem 9.3.3 Anta α er en formel i L. Er da α Kripke DS4-gyldig er α også DS4-gyldig.

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L. Anta (1) at α er Kripke DS4-gyldig. Anta nå at (2) m;0 er en vilkårlig DS4-modell. Det vil vil være tilstrekkelig å bevise at $\alpha\hat{e}\pi;1(m;0)$. Definer en Kripke DS4-modell $M=<\varphi,G,K,R>$ på nøyaktig samme måte som i Teorem 9.3.2. Det vil si, sett per definisjon:

(i) $G= m;0$

(ii) $K= \Gamma(m;0)$ og

(iii) $R = R;(m;0)$

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) $\varphi(p) = Mg(m: m\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, p\hat{e}\pi;1(m))$

Sett tilslutt (v) $M= <\varphi, G,K,R>$. Da har vi i lys av Teorem 9.3.2 at:

(3) $(Aw)(w\hat{e}K \rightarrow (<M,w> \models \alpha \leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(w)))$ herav:

(4) $<M,G> \models \alpha \leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(G) \leftrightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(m;0)$

Men α er etter (1) Kripke DS4-gyldig og M er en Kripke DS4-modell. Det følger da at $<M,G> \models\alpha$. Fra dette og (4) følger det vi ønsker, nemlig: $\alpha\hat{e}\pi;1(m;0)$. **QED.**

Vi har tidligere nevnt at ethvert teorem i DS4 er Kripke DS4-gyldig. Videre har vi fra Teorem 9.1.5 at enhver DS4-gyldig formel er et teorem i DS4. Fra dette og Teorem 9.3.3 følger da vårt hovedresultat:

Teorem 9.3.4 En formel α i L er Kripke DS4-gyldig hvis og bare hvis den er DS4-gyldig.

§10 Systemet DS5. Reaksiomatisering

Det setningslogiske modalsystemet DS5 defineres slik: Aksiomer i systemet er for det første alle formlene i PC*. I tillegg er alle instanser av de følgende to skjemaer aksiomer i systemet:

(1) $L(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta)$

(2) $L\alpha\rightarrow M\alpha$

(3) $M\alpha \rightarrow LM\alpha$

© Morten Harboe Rognes 2008

(4) $L\alpha \rightarrow LL\alpha$

Systemet har bare to slutningsregler, nemlig modus ponens:

MP $\vdash\alpha$ & $\vdash \alpha\rightarrow\beta \rightarrow \vdash \beta$

og det som vi her skal kalle nødvendighetsregelen:

RL $\vdash\alpha \rightarrow \vdash L\alpha$

Man kan definere systemet DS5 som den minste formelmengden X i L som inneholder alle de nevnte aksiomer og som i tillegg er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen RL.

På samme måte som de normale systemene vi har undersøkt tidligere kan systemet DS5 aksiomatiseres med modus ponens som eneste slutningsregel. Vi avgrenser først formelmengdene K(q0), K(q) og K(q);∞ ved den følgende definisjon

Definisjon 10.1 Vi setter:

(a) $K(q0) = PC^* \cup Mg((L\alpha\rightarrow M\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L)) \cup Mg((M\alpha\rightarrow LM\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L)) \cup Mg((L\alpha\rightarrow LL\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L)) \cup Mg((L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L\alpha\rightarrow L\beta): \alpha,\beta\hat{e}Fm(L))$

(b) K(q) er den minste mengden X av formler i L som oppfyller de følgende krav:
- (i) K(s) Inkl X
- (ii) Er $\delta\hat{e}$ X og er γ en vilkårlig formel i L har vi $(L\gamma \rightarrow L\delta)\hat{e}X$

(c) $K(q);\infty = K(db) \cup Mg(L(n)(\alpha\rightarrow\alpha): \alpha\hat{e}Fm(L) \& n\hat{e}N)$

Systemet DS5* er den minste formelmengden i X som inneholder K(q);∞ og som er lukket under modus ponens. Det er altså det systemet som har formlene i K(q);∞ som aksiomer, og der den eneste slutningsregelen er modus ponens. Vi skal vise at DS5* og DS5 er ekvivalente. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 10.2 $(A\alpha)(\alpha\hat{e}Fm(L) \rightarrow (\alpha\hat{e}DS5^* \leftrightarrow DS5 \vdash \alpha))$

Bevis: Beviset for denne påstanden er nøyaktig som beviset for Teorem 5.3 med visse helt opplagte endringer: Man erstatter "K(f0)" overalt med "K(q0)" samt "K(f)" og "K(f);∞" overalt med henholdsvis "K(q)" og "K(q);∞". Dessuten må alle referanser til systemene F og F* erstattes med referanser til DS5 og DS5*. Det eneste man behøver å peke på er at K(q0) nå også omfatter alle formler av typen $L\alpha\rightarrow M\alpha$ og $M\alpha\rightarrow LM\alpha$ samt $L\alpha\rightarrow LL\alpha$. Men disse er jo åpenbart aksiomer i DS5. Omvendt har vi at $L\alpha\rightarrow M\alpha$, $M\alpha\rightarrow LM\alpha$ samt $L\alpha\rightarrow LL\alpha$) er teoremer i DS5. Men $L\alpha\rightarrow M\alpha$, $M\alpha\rightarrow LM\alpha$ og $L(\alpha\rightarrow LM\alpha)$ er med i K(q);∞ og derfor aksiomer i DS5*. Det følger da at de alle er teoremer i DS5*. **QED**

I det følgende trenger vi også det følgende teorem som viser at skjemaet $L(L\alpha\rightarrow\alpha)$ er et teorem i DS5.

Teorem 10.3 $DS5 \vdash L(L\alpha\rightarrow\alpha)$

Bevis: I det følgende bruker vi "|-" som forkortelse for "DS5 |-". Vi har $\vdash M\alpha\rightarrow LM\alpha$. Fra dette kan vi slutte ved substitusjon: $\vdash M\neg\alpha \rightarrow LM\neg\alpha$. Herav har vi, når man husker på at M er ekvivalent med $\neg L\neg$, at $\vdash \neg L\alpha \rightarrow L\neg L\alpha$. Herav følger ved hjelp av ren setningslogikk: $\vdash \neg L\neg L\alpha \rightarrow L\alpha$. Fra dette i sin tur følger ved hjelp av definisjonen av M:

© Morten Harboe Rognes 2008

|- MLα → Lα. Herav kan vi så slutte ved hjelp av setningslogikk: |- ¬(MLα & ¬Lα). Herav ved hjelp av definisjonen av M: (1) |- ¬(MLα & M¬α). Nå kan man lett utlede følgene i DS5:
|- M(γ&δ) → Mγ&Mδ. Ved hjelp av dette, substitusjon og (1) oppnår man:
|- ¬M(Lα & ¬α). Herav ved hjelp av prinsippet om substitusjon av ekvivalenter :
|- ¬(M¬(Lα→α)). Ved hjelp av teoremet |- Lα ↔ ¬M¬α får vi så det vi ønsker: |- L(Lα→α).
QED.

§10.1 Halvsyntaktiske modeller for DS5. Gyldighetsteorem og fullstendighet

Vi har nå avgrenset systemet DS5 presist. Vi har også definert det korresponderende, ekvivalente systemet DS5*. Det vi nå ønsker å gjøre er å tilordne dette systemet en klasse av halvsyntaktiske modeller. Dernest vil vi vise at alle teoremene i systemet holder i alle modeller i den modellklassen systemet har blitt tilordnet. Dessuten ønsker vi å vise at det motsatte holder, nemlig at dersom en formel holder i alle modellene i den modellklasse som er tilordnet F så er formelen også et teorem i systemet.

Vi avgrenser mengden av DS5-modeller for språket L.

Definisjon 10.1.1 En DS5-modell M for språket L er en halvsyntaktisk modell M=<Δ,R> for L som oppfyller de følgende krav:

(i) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → (αêR & (α→β)êR → βêR))
(ii) K(q);∞ Inkl R
(iii) (Aα)(αêFm(L) → αêR → ¬((¬α)êR)
(iv) (Aα)(αêFm(L)→ MαêΔ → MαêR
(v) (Aα)(αêFm(L) → (αêR→ LαêR)

Man ser altså at dersom en halvsyntaktisk modell <Δ,R> skal være en DS5-modell må R være lukket under modus ponens og alle formlene i K(q);∞ være inkludert i R. Definisjonen er fullstendig analog med den tilsvarend definsjonen vi ga i forbindelse med systemet DS4. Den eneste forskjellen er at "K(s);∞" i vår tidligere definisjon er erstattet med "K(q);∞", og at vi har endret klausulen (iv).

Vi bemerker også at siden R inneholder K(q);∞ og er lukket under modus ponens har vi at DS5* Inkl R.

En formel α i L er DS5-gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver DS5-modell M= <Δ,R> at αêR. Betegner vi klassen av DS5-modeller med |DS5|, kan denne definisjonen formaliseres slik:

Definisjon 10.1.2 Anta α er en formel i L. Da gjelder:

(i) α er DS5-gyldig ↔ (AM)(Mê|DS5| → αêπ;1(M))

Vi viser først det følgende gyldighetsteorem kalkylen DS5:

Teorem 10.1.3 (Gyldighetsteorem). Anta α er en vilkårlig formel i L. Da gjelder:

αêDS5* → α er DS5-gyldig

Bevis: Beviset for dette er helt analogt med beviset for den tilsvarene sats for systemet DM,

© Morten Harboe Rognes 2008

Teorem 9.1.3. Siden L(Lα→α) ikke lenger er noe aksiom i DS5 behøver man ikke vise at dette er gyldig. Denne delen av beviset kan derfor sløyfes. Det eneste vi behøver å gjøre i tillegg, er å vise at formelen Mα→LMα er DS5-gyldig. Men dette ser man lett av kravet (iv) i definisjonen av DS5-modell. **QED.**

De følgende teoremer, Teorem 10.1.4 - 10.1.9 er helt analoge med de tilsvarende satser for systemet DS4. Det er bare små endringer som trengs i bevisene. Vi formulerer først fullstendighetsteoremet for systemet DS5, dernest de enkelte følgesetningene til dette teoremet.

Teorem 10.1.4 Anta Γ er en DS5-konsistent mengde av formler i L. Da finnes en modell Mê |DS5| slik at Γ Inkl π;1(M)

Bevis: Beviset her blir i det vesentlige som for systemet F. I hovedsaken får man et bevis for DS5 om man overalt i beviset for Teorem 5.1.4 overalt erstatter "F" og "F*" med henholdsvis "DS5" og "DS5*", videre erstatter alle forekomster av "K(f0)", "K(f)" og "K(f);∞" med henholdsvis "K(q0)", "K(q)" og "K(q);∞". Man må imidlertid redefinere sekvensen av formelmengder <f(n)>/nêN/ som ble innført. I definisjonen av f(0) må man inkludere formlene Lα→Mα, Mα→LMα samt Lα→LLα. Utover dette kan alt som står i beviset for Teorem 5.1.4 beholdes uendret. Man må imidlertid vise at den modellen, M= <Δ,R>, som konstrueres i beviset oppfyller kravet (iii) i Definisjon 9.1.1:

(Aα)(αêFm(L) → αêR → ¬((¬α)êR)

Dette kan man gjøre på nøyaktig samme måte som i det tilsvarende beviset for systemet DB.

Dessuten må man vise at modellen M= <Δ,R>, som oppfyller kravet (iv) i Definisjon 10.1.1:

Man har imidlertid at DS5* Inkl Δ siden Δ er en maksimalt konsistent mengde. Det følger at Mα→LMα da må være med i Δ siden (Mα→LMα)êK(q);∞ Inkl DS5* Inkl Δ. Men siden vi har i enhver halvsyntaktisk modell at LαêΔ ↔ αêR for alle formler α, følger det at MαêΔ→MαêR. Dette viser at kravet (iv) i definisjonen av DS5-modell er oppfylt.

Endelig må man vise at modellen M= <Δ,R>, som oppfyller kravet (iv) i Definisjon 10.1.1:

Man har imidlertid at DS5* Inkl Δ siden Δ er en maksimalt konsistent mengde. Det følger at Lα→LLα da må være med i Δ siden (Lα→LLα)êK(s);∞ Inkl DS5* Inkl Δ. Men siden vi har i enhver halvsyntaktisk modell at LαêΔ ↔ αêR for alle formler α, følger det at αêR→LαêR. Dette viser at kravet (v) i definisjonen av DS5-modell er oppfylt. **QED.**

Vi anfører de følgene satser som er helt analoge med Teorem 8.1.6 - Teorem 8.1.9 uten direkte bevis. Man får imidlertid bevis for disse satsene om man i de tilsvarende bevis for systemet DB erstatter alle uttrykk som har tilknytning til DB med tilsvarende uttrykk som er definert i forbindelse med systemet DS5.

Teorem 10.1.5 Anta α er en formel i L. Da gjelder:

(i) (AM)(Mê|DS5| → αêπ;1(M)) → DS5 |-α

Teorem 10.1.6 Anta M=<Δ,R> er en DS5-modell. Da har man at R er lukket under DS5-konsekvens.

© Morten Harboe Rognes 2008

Teorem 10.1.7 (Kompakthetsteorem) Anta Δ er en formelmengde i L. Da har man at Δ Inkl π;(M) for en eller annen DS5-modell M hvis og bare hvis man har for enhver endelig delmengde Γ av Δ at det finnes en DS5-modell M' slik at Γ Inkl π;1(M').

Teorem 10.1.8 Anta Δ er en formelmengde Anta αêFm(L). Da har vi at αêπ;1(M) for alle DS5 -modeller M der Δ Inkl π;1(M), hvis og bare hvis det finnes formler β;1,...,β:nêΔ slik at (β;1& .... & β;n → α) er et teorem i DS5

Teorem 10.1.9 Anta Δ er en formelmengde som er lukket under DS5-konsekvens. Anta α er en formel i L. Da har vi at αêΔ hvis og bare hvis αêπ;1(M) for enhver DS5-modell M der Δ Inkl π;1(M)

Dermed har vi anført de viktigste resultatene vi trenger om halvsyntaktiske modeller for systemet DS5. Vi skal naturligvis benytte disse resultatene når vi i neste avsnitt undersøker sammenhengen mellom DS5-modeller og Kripke DS5-modeller.

§10.2 Kripke-modeller for DS5. Gyldighetsteorem

De følgende definisjoner er helt analoge med dem som er gitt for systemet DS4. I Definisjon 9.2.1 er det imidlertid en forskjell fra Definisjon 7.2.1 siden vi av en Kripke DS5-struktur <G,K,R> også krever at R skal oppfylle kravet

(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêK → (xRy&xRz → yRz)).

Dette kravet må pålegges Kripke-modellene for systemet DS5 for at vi skal bli istand til å vise at skjemaet Mα→LMα er gyldig. Vi gir her definisjonene uten ytterligere forklaringer.

Definisjon 10.2.1 (a) En *Kripke DS5-struktur* er et ordnet triple <G,K,R> som oppfyller de følgende krav: (i) K er en ikke-tom mengde. (ii) G er et element i K (iii) R er en relasjon over K som oppfyller følgende krav:

(i) (Ax)(xêK → (Ey)(yêK & xRy))
(ii) (Ax)(Ay)(x,y,zêK → (xRy &yRz → xRz))
(iii) (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêK → (xRy&xRz → yRz)).

Definisjon 10.2.2 Med *en verditilordning φ assosiert med strukturen <G,K,R>*, der K er en ikke-tom mengde, G et element i K og R en relasjon over K, forstår vi en funksjon φ som til enhver setningsvariabel p i L tilordner en delmengde av K

Definisjon 10.2.3 Men *Kripke DS5-modell for L* forstås en struktur <φ,G,K,R> der <G,K,R> er en Kripke DS5 -struktur og φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R>.

Definisjon 10.2.4 La M= <φ,G,K,R> være en Kripke DS5-modell for L, w et element i K og α en formel i L. Da defineres "α er sann i verdenen w i modellen M", i symboler "<M,w> ⊨ α" induktivt på lengden av α slik:

(i) Er p en setningsvariabel i L setter vi:
<M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p)
(ii) Er α,β formler i L setter vi:
<M,w> ⊨ (α → β) ↔ (<M,w> ⊨ α → <M,w> ⊨ β)

© Morten Harboe Rognes 2008

(iii) Er α en formel i L setter vi:
<M,w> ⊨ Lα ↔ (Aw')(w'êK & wRw' → <M,w'> ⊨ α)

Etter disse forberedelsene kan vi nå definere hva som menes med at en formel er Kripke DS5-gyldig. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 10.2.5 Anta αêFm(L). Da sier vi at α er Kripke DS5 -gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver Kripke DS5-modell M= <φ,G,K,R> at <M,G> ⊨ α

Det er en relativt enkel sak å vise at den følgende sats holder. Det kan likevel være av interesse å vise enkelte punkter.

Teorem 10.2.6 Anta α er en formel i L. Er α et teorem i DS5 har vi at α er Kripke DS5 -gyldig.

Bevis: Som antydet ovenfor skal vi ikke gi noe fullstendig bevis for denne satsen. Vi innskrenker oss til åvise at skjemaet Mα→LMα er gyldig i alle Kripke DS5-modeller. Anta M=<φ,G,K,R> er en vilkårlig Kripke DS5-modell. Anta (1) <M,G> ⊨ Mα. Fra definisjonen av ⊨ følger da at det finnes wêK slik at (2) GRw & <M,w> ⊨ α. Anta nå for vilkårlig w' at (3) w'êK & GRw'. Siden R er evklidisk, det vil si oppfyller kravet (iii) i Definisjon 10.2.1 følger det fra (2) og (3) at w'Rw. Fra dette, (2) og definisjonen av ⊨ følger <M,w'> ⊨ Mα. Men w' var et vilkårlig element i K slik at (3). derfor har vi: (Aw)(wêK & GRw → <M,G> ⊨ Mα). Ved hjelp av definisjonen av ⊨ kan vi da slutte: <M,G> ⊨ LMα. Vi har nå vist: <M,G> ⊨ Mα → <M,G> ⊨ LMα. Det følger at <M,G> ⊨ (Mα→LMα). Siden M var en vilkårlig Kripke DS5-modell følger det at Mα→LMα er Kripke DS5-gyldig. **QED.**

§10.3 Om sammenhengen mellom DS5-modeller og Kripke DS5-modeller.

Vi skal nå gå nærmere inn på sammenhengen mellom DS5-modeller og den type modeller som har blitt definert i forrige paragraf, nemlig Kripke DS5-modeller. Vårt viktigste resultat i dette avsnittet er at dersom en formel α er Kripke DS5-gyldig så er den også DS5-gyldig. Siden Teorem 10.2.6 sier at ethvert teorem i DS5 er Kripke DS5-gyldig og vi tidligere har vist at enhver DS5-gyldig formel er et teorem i DS5 (Teorem 10.1.5) følger det at enhver formel er Kripke DS5-gyldig hvis og bare hvis den er DS5-gyldig. De to gyldighetsbegrepene faller derfor sammen. Sammen med vårt tidligere fullstendighetsbevis gir resultatene i dette avsnittet en også et nytt fullstendighetsbevis for at DS5 er fullstendig med hensyn på Kripke DS5-gyldighet.

Vi minner om at vi her betegner mengden av alle halvsyntaktiske DS5-modeller med |DS5|. Vi definerer en relasjon μ mellom DS5-modeller ved å sette at <m,m'>êμ hvis og bare hvis m,m' ê|DS5| og vi dessuten har at π;2(m) Inkl π;1(m'). Holder <m,m'>êμ sier vi at DS5-modellen m' *er underordnet* modellen m. Er m en DS5-modell betegner Γ(m) den minste delmengden X av |DS5| der vi har at mêX og hvor vi dessuten har for alle DS5-modeller m,m' at dersom mêX og m' er underordnet m så er også m'êX.

Vi definerer dessuten, om m er en DS5-modell, relasjonen R;m Inkl |D|X|D| ved å sette:

(+) R;m = (μ) Ω (Γ(m)XΓ(m))

Man ser fra dette at R;m er en relasjon over Γ(m). I tillegg må m;1,m,2 være med i Γ(m). På

© Morten Harboe Rognes 2008

dette punkt må vi imidlertid vise at relasjonen R;m er seriell, transitiv og evklidisk for at den skal oppfylle kravene til alternativrelasjonen i en Kripke DS5-struktur. Det er med andre ord nødvendig å bevise det følgende.

(i) $(Am)(m\hat{e}|DS5| \rightarrow (Em')(m'\hat{e}|DS5| \,\&\, m\mu m')$
(ii) $m,m'\hat{e}|DS5| \rightarrow m\mu m' \rightarrow m'\mu m'' \rightarrow m\mu m''$
(iii) $m,m',m''\,\hat{e}|DS5| \rightarrow m\mu m' \,\&\, m\mu m'' \rightarrow m'\mu m''$

De to første påstandene bevises nøyaktig på samme måte som i §9.3 i forbindelse med systemet DS4. Det er derfor bare nødvendig å gi et bevis for (iii) her.

Anta derfor at (1) $m,m',m''\,\hat{e}|DS5| \,\&\, m\mu m'$ og (2) $m\mu m''$. Ved hjelp av definisjonen av μ følger fra dette:

(3) $\pi;2(m)$ Inkl $\pi;1(m')$
(4) $\pi;2(m)$ Inkl $\pi;1(m'')$

Vi ønsker å vise at $m'\mu m''$, med andre ord at $\pi;2(m')$ Inkl $\pi;1(m'')$. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes α slik at

(5) $\alpha\hat{e}\pi;2(m') \,\&\, \neg(\alpha\hat{e}\pi;1(m''))$

Nå har vi i kraft av Teeorem 10.3 at DS5 |-$L(L\alpha\rightarrow\alpha)$. Det følger, siden m er en DS5-modell, at $L(L\alpha\rightarrow\alpha)\hat{e}\pi;1(m)$. Siden M er en halvsyntaktisk modell følger fra dette at $(L\alpha\rightarrow\alpha)\hat{e}\pi;2(m)$. Fra dette og (4) kan man så utlede at $(L\alpha\rightarrow\alpha)\hat{e}\pi;1(m'')$. Siden $\pi;1(m'')$ er en sannhetsmengde - m'' er en DS5-modell og derfor en halvsyntaktisk modell - følger:

(6) $L\alpha\hat{e}\pi;1(m'') \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(m'')$

Fra dette og (5) følger: (7) $\neg(L\alpha\hat{e}\pi;1(m''))$. Fra (7) og (4) følger videre:

(8) $\neg(L\alpha\hat{e}\pi;2(m))$.

Nå har vi at m er en DS5-modell og derfor at $(L\alpha\rightarrow LL\alpha)\hat{e}\pi;1(m)$. Siden $\pi;1(m)$ må være en sannhetsmengde kan vi fra dette slutte at

(9) $L\alpha\hat{e}\pi;1(m) \rightarrow LL\alpha\hat{e}\pi;1(m)$. Herav har vi siden m er halvsyntaktisk:

(10) $L\alpha\hat{e}\pi;1(m) \rightarrow L\alpha\hat{e}\pi;2(m)$. Fra dette og (8) følger:

(11) $\neg(L\alpha\hat{e}\pi;1(m))$. Siden $M\alpha\rightarrow LM\alpha$ er et aksiom i DS5 har vi at $\neg L\alpha\rightarrow L\neg L\alpha$ er et teorem i DS5. det følger, siden m er en DS5-modell at

(12) $(\neg L\alpha\rightarrow L\neg L\alpha)\hat{e}\pi;1(m)$. Fra dette og (11) kan man slutte:

$L\neg L\alpha\hat{e}\pi;1(m)$ og derfor at (13) $(\neg L\alpha)\hat{e}\pi;2(m)$. Fra den første konjunkten i (5) følger:

(14) $L\alpha\hat{e}\pi;1(m')$ Fra (3) og (13) har vi imidlertid $(\neg L\alpha)\hat{e}\pi;1(m')$ som motsier (14) siden $\pi;1(m')$ er en sannhetsmengde. Det er altså umulig at det kan finnes noen α slik at (5) holder. Det følger at $\pi;2(m')$ Inkl $\pi;1(m'')$ og derfor at $m'\mu m''$. Vi har dermed vist at $<m,\Gamma(m),R;m>$ oppfyller alle de krav som stilles til en Kripke DS5-struktur.

Vi går nå videre å beviser den følgende sats:

Teorem 10.3.1 Anta m;0 er en DS5-modell. Anta videre at $m\hat{e}\Gamma(m;0)$. Da har vi
$L\alpha\hat{e}\,\pi;1(m) \leftrightarrow (Am')(m'\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, <m,m'>\hat{e}R;(m;0) \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(m'))$

Bevis: Anta (1) at m;0 er en DS5-modell og (2) $m\hat{e}\Gamma(m;0)$.

(a) Vi gir først et bevis for kondisjonalen mot høyre. Anta derfor (3) $L\alpha\hat{e}\pi;1(m)$ og (4) $m'\hat{e}\Gamma(m;0) \,\&\, <m,m'>\hat{e}R;(m;0)$. Fra det siste følger at m' er underordnet m. Da har vi per definisjon at (5) $\pi;2(m)$ Inkl $\pi;1(m')$.

Siden m er en DS5-modell, og derfor en halvsyntaktisk modell, oppfyller den kravet: (6) $(A\beta)(\beta\hat{e}Fm(L) \rightarrow (L\beta\hat{e}\pi;1(m) \leftrightarrow \beta\hat{e}\pi;2(m)))$. Fra dette og (3) følger $\alpha\hat{e}\pi;2(m)$. herav

© Morten Harboe Rognes 2008

har vi så ved hjelp av (5) det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m').

Dette viser at kondisjonalen mot høyre holder.

(b) Vi tar så for oss kondisjonalen mot venstre. Anta

(6) (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m')) Fra dette følger:

(7) (Am')(m'ê|DS5| & <m,m'>êμ → αêπ;1(m')) Dette innebærer i sin tur at

(8) (Am')(m'ê|DS5| & π;2(m) Inkl π;1(m') → αêπ;1(m'))

Men siden m er en DS5-modell er π;2(m) lukket under DS5-konsekvens i henhold til Teorem 10.1.6. Fra dette forhold, (8) og Teorem 10.1.9 kan vi slutte at (9) αêπ;2(m). Men siden m er en DS5-modell oppfyller den kravet: (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (9) følger derfor det vi ønsker: Lαêπ;1(m).

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Det neste teoremet er avgjørende for å kunne vise at DS5-gyldighet er ekvivalent med Kripke DS5-gyldighet.

Teorem 10.3.2 Anta m;0 er et vilkårlig element i |DS5|. Sett per definisjon:

(i) G= m;0

(ii) K= Γ(m;0) og

(iii) R = R;(m;0)

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))

Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi:

(a) M er en Kripke DS5-modell

(b) Er da α en vilkårlig formel i L har vi:

(Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w)))

Bevis: (a) Det skulle være temmelig opplagt at <G,K,R> er en Kripke DS5-modellstruktur. Man har at G=m;0êΓ(m;0)=K i lys av definisjonen av operasjonen Γ. Videre skulle det være klart at R;(m;0) er en seriell relasjon over K=Γ(m;0) i lys av definisjonen av R;m. Det fremgår også fra det vi beviste ovenfor før Teorem 10.3.1 at <G,K,R> oppfyller det tredje kravet i definisjonen vi ga av en Kripke DS5-modellstruktur. Det skulle heller ikke være vanskelig å se at R er transitiv. Man innser også lett på basis av definisjonen (iv) i teoremet at φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R> når man studerer Definisjon 10.2.2. Det følger derfor at M=<φ,G,K,R> er en Kripke DS5-modell.

(b) Vi beviser dette ved induksjon på lengden av formler i L. Anta w er et vilkårlig element i K. Da har vi wêΓ(m;0).

(i) Er α en setningsvariabel p har vi at

<M,w> ⊨ α ↔ <M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p) ↔ pêπ;1(w)

(ii) Er α = ¬β for en eller annen formel β har vi:

<M,w> ⊨ ¬β ↔ ¬(<M,w> ⊨ β)
↔ ¬(βêπ;1(w)) (Her benytter vi induksjonshypotesen)
↔ (¬β)êπ;1(w) (Siden π;1(w) er en sannhetsmengde)
↔ αêπ;1(w)

(iii) Er α=(β→γ) for visse formler β,γ har vi:

<M,w> ⊨ (β→γ) ↔ (<M,w> ⊨ β → <M,w> ⊨ γ)
↔ (βêπ;1(w) → γêπ;1(w)) (Etter induksjonshypotese)
↔ (β→γ)êπ;1(w) (π;1(w) er en sannhetsmengde)

© Morten Harboe Rognes 2008

$\leftrightarrow$ $\alpha \hat{e} \pi;1(w)$

(iv) Er $\alpha = L\beta$ for en eller annen formel β har vi:

$<M,w> \models L\beta \leftrightarrow (Aw')(w' \hat{e} K \ \& <w,w'> \hat{e} R;(m;0) \rightarrow <M,w'> \models \alpha)$

$\leftrightarrow (Aw')(w' \hat{e} \Gamma(m;0) \ \& <w,w'> \hat{e} R;(m;0) \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(w'))$

Men i ved hjelp av Teorem 10.3.1 har vi:

$(Aw')(w' \hat{e} \Gamma(m;0) \ \& <w,w'> \hat{e} R;(m;0) \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(w')) \leftrightarrow L\alpha \hat{e} \pi;1(w)$

Det følger at $<M,w> \models L\beta \leftrightarrow L\alpha \hat{e} \pi;1(w)$.

Dette viser at punkt (b) i teoremet holder. **QED.**

Ved hjelp av Teorem 10.3.2 er det nå lett å vise:

Teorem 10.3.3 Anta α er en formel i L. Er da α Kripke DS5-gyldig er α også DS5-gyldig.

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L. Anta (1) at α er Kripke DS5-gyldig. Anta nå at (2) m;0 er en vilkårlig DS5-modell. Det vil vil være tilstrekkelig å bevise at $\alpha \hat{e} \pi;1(m;0)$. Definer en Kripke DS5-modell $M=<\varphi,G,K,R>$ på nøyaktig samme måte som i Teorem 10.3.2. Det vil si, sett per definisjon:

(i) $G = m;0$

(ii) $K = \Gamma(m;0)$ og

(iii) $R = R;(m;0)$

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) $\varphi(p) = Mg(m: m \hat{e} \Gamma(m;0) \ \& \ p \hat{e} \pi;1(m))$

Sett tilslutt (v) $M= <\varphi, G,K,R>$. Da har vi i lys av Teorem 10.3.2 at:

(3) $(Aw)(w \hat{e} K \rightarrow (<M,w> \models \alpha \leftrightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(w)))$ herav:

(4) $<M,G> \models \alpha \leftrightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(G) \leftrightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(m;0)$

Men α er etter (1) Kripke DS5-gyldig og M er en Kripke DS5-modell. Det følger da at $<M,G> \models \alpha$. Fra dette og (4) følger det vi ønsker, nemlig: $\alpha \hat{e} \pi;1(m;0)$. **QED.**

Vi har tidligere nevnt at ethvert teorem i DS5 er Kripke DS5-gyldig. Videre har vi fra Teorem 10.1.5 at enhver DS5-gyldig formel er et teorem i DS5. Fra dette og Teorem 10.3.3 følger da vårt hovedresultat:

Teorem 10.3.4 En formel α i L er Kripke DS5-gyldig hvis og bare hvis den er DS5-gyldig.

§11 Avslutning

På den neste side har vi tatt med en figur som viser inklusjonsforholdene mellom de deontiske logikkene vi har studert i dette skrift og de systemene som ble undersøkt i Rognes [1]. Vi skal imidlertid avrunde med å formulere, og bevise, en sats som kaster ytterligere lys over forholdet mellom de deontiske systemene DM, DB, DS4 og DS5 og de korresponderene alethiske modalsystemene T, B, S4 og S5. Satsen er denne:

Teorem 11.1 Anta α er en formel i L. Da gjelder:

(a) $DM \vdash L\alpha \leftrightarrow T \vdash \alpha$

(b) $DB \vdash L\alpha \leftrightarrow B \vdash \alpha$

(c) $DS4 \vdash L\alpha \leftrightarrow S4 \vdash \alpha$

(d) $DS5 \vdash L\alpha \leftrightarrow S5 \vdash \alpha$

© Morten Harboe Rognes 2008

Bevis: Når det gjelder kondisjonalene mot høyre i denne satsen skulle de være relativt opplagt. Man ser meget raskt når man studerer aksiomatiseringene av de deontiske systemene DM, DB, DS4 og DS5 at alle aksiomene i disse systemene er utledbare i de korresponderende alethiske logikkene. Siden slutningsreglene er de samme har vi derfor X er et av systemene T,B, S4 eller S5 at dersom DX |-Lα så holder også X |-Lα. Men i X er Lα→α et aksiom og derfor et teorem. Det følger at vi har X|- α.

Når det gjelder kondisjonalene mot venstre krever disse noe mer omtanke. Vi tar for oss hvert punkt i teoremet i rekkefølge.

Ad (a): Anta (1) ¬(DM|-Lα). Vi skal vise at da kan heller ikke α være noe teorem i T. Vi har nå vist at DM er fullstendig med hensyn på mengden av Kripke DM-modeller. Det følger derfor fra (1) at det finnes en Kripke DM-modell M=<φ,G,K,R> der vi har:

(2) <M,G> ⊨ ¬Lα. Fra dette følger enn mer at det finnes w der (3) wêK slik at (4) GRw & <M,w> ⊨ ¬α. Definer nå K(w) ved å sette:

(5) K(w) = Mg(w': w'êK & (En)(n>=0 & wR(n)w')[5]

Vi betrakter så strukturen M' definert ved (6) M'=<φ',w,K(w),R> der φ' er definert ved: (7) φ'(p) = φ(p) Ω K(w) om p er en utsagnsvariabel i L. Vi skal nå vise to ting:

(8) K(w) er en Kripke T-modell

(9) (Aw')(w'êK(w) → (<M,w'> ⊨ α ↔ <M',w'> ⊨α)) for alle αêFm(L)

La oss først ta for oss (8). For å vis dette er det nok å vise at R er refleksiv over K(w). med andre ord må vi vise: (10) (Aw')(w'êK(w) → w'Rw') Anta derfor for vilkårlig w' at w'êK(w). Da har vi at det finnes n>=0 slik at wR(n)w'. Tilfelle (i) n=0. Da har vi at w=w'. Nå har vi at R er betinget refleksiv over K. Dette innebærer at (11) (Ax)(Ay)(x,yêK & xRy → yRy). Fra dette følger at GRw → wRw. Men fra dette og (4) følger wRw og derfor w'Rw'. Tilfelle (ii) n>0. Da har vi at wR(n)w'. Fra dette følger at det må finnes noe yêK(w) slik at yRw' Siden w'êK(w) Inkl K følger derfor ved hjelp av (11) at w'Rw'. Dette viser at R er refleksiv over K(w). Vi kan derfor konkludere med at M' er en Kripke T-modell.

(9) bevises ved induksjon på lengden av formler. Er p en utsagnsvariabel har vi at <M,w'> ⊨ p ↔ w'êφ(p) Men siden w'êK(w) har vi w'êφ(p) ↔ w'êφ(p)ΩK(w) ↔ <M,w'> ⊨ p.

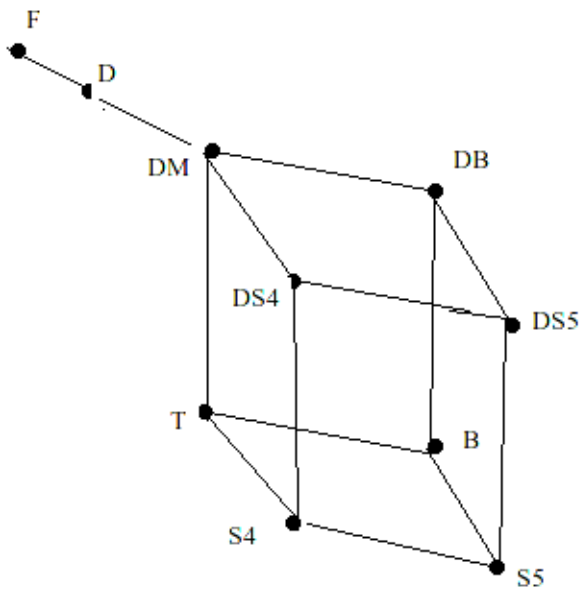
Påstanden holder derfor for setningsvariabler. Induksjonstrinnene for de setningslogiske konnektivene → og ¬ er trivielle. Når det gjelder formler av typen Lα har vi:

5 Merk at dersom R er en relasjon er R(n), n'te iteraten av R, definert induktivt slik: (i) xR(0)y ↔ x=y (ii) xR(n+1)y ↔ (Ez)(xR(n)z & zRy). Man har derfor at for eksempel
xR(3)y ↔ (Ez;1)(Ez;2)(xRz;1 & z;1Rz;2 & z;2Ry)

© Morten Harboe Rognes 2008

Figur som viser inklusjonsforholdene mellom de systemene vi har undersøkt.

Figur



Er S og S' to systemer på figuren og er det slik at S' er plassert "lavere" enn S kan man slutte at alle teoremene i systemet S er blandt teoremene i S'. Dette innebærer for eksempel at systemet F er inkludert i systemet D som i sin tur er inkludert i systemet DM. Man ser også at de enkelte deontiske systemene er inkludert i sine respektive alethiske motstykker. DM er inkludert i T, DB inkludert i B og så videre. Fra figuren ser man at S5 er det mest inklusive av de systemene vi har undersøkt. Det bør noteres at alle inklusjonene som er antydet på diagrammet er ekte. S4 er genuint svakere enn S5, det finnes med andre ord teoremer i S5 som ikke lar seg utlede i S4. Tilsvarende er DS5 genuint sterkere en DS4, som i sin tur er sterkere enn DM. Tilsvarende bemerkninger kan gjøres i forbindelse med de andre systemene som er anskueliggjort på figuren.

© Morten Harboe Rognes 2008

(12) <M,w'> ⊨ Lα ↔ (Aw")(w'êK& w'Rw" → <M,w"> ⊨ α).
Nå har vi imidlertid at w'êK(w) og at dersom w'Rw" så er også w"êK(w). Det følger derfor at høyre side i (12) er ekvivalent med (Aw")(w'êK(w) & w'Rw" → <M,w"> ⊨ α). I lys av induksjonshypotesen er dette ekvivalent med: (Aw")(w'êK(w) & w'Rw" → <M',w"> ⊨α). I sin tu er dette ekvivalent med <M',w'> ⊨ Lα. Dette viser at (9) holder.

Anta nå for reduktio ad absurdum at T|-α. Fra gyldighetsteoremet for T følger da at α er holder i enhver Kripke T-modell. det følger derfor, siden M' er en T-modell, at <M',w> ⊨α siden wêK(w) har vi da i lys av (9) at <M,w> ⊨ α. Dette strider åpenbart mot (4). Det følger at ¬(T|- α), som er det vi ønsker. Bevisene for de andre punktene i teoremet følger det samme mønster.

Ad (b): Anta (1) ¬(DB|-Lα). Vi skal vise at da kan heller ikke α være noe teorem i B. Vi har nå vist at DB er fullstendig med hensyn på mengden av Kripke DB-modeller. Det følger derfor fra (1) at det finnes en Kripke DB-modell M=<φ,G,K,R> der vi har:

(2) <M,G> ⊨ ¬Lα. Fra dette følger enn mer at det finnes w der (3) wêK slik at (4) GRw & <M,w> ⊨ ¬α. Definer nå K(w) ved å sette:

(5) K(w) = Mg(w': w'êK & (En)(n>=0 & wR(n)w')

Vi betrakter så strukturen M' definert ved (6) M'=<φ',w,K(w),R> der φ' er definert ved:
(7) φ'(p) = φ(p) Ω K(w) om p er en utsagnsvariabel i L. Vi skal nå vise to ting:

(8) K(w) er en Kripke B-modell

(9) (Aw')(w'êK(w) → (<M,w'> ⊨ α ↔ <M',w'> ⊨α)) for alle αêFm(L)

For det første må vi vise at R er seriell over K(w). Anta derfor for vilkårlig w' at w'êK(w). Vi har åpenbart at K(w) Inkl K. Det følger at w'êK. Siden R er seriell over K følger det derfor at det finnes w" slik at w'Rw" & w"êK. Men siden w'êK(w) har vi at wR(n)w' for noe nêN. Vi har derfor at wR(n+1)w" og føkgelig at w"êK(w). Vi kan dermed slutte siden w' var et vilkårlig element at (Aw')(w'êK(w) → (Ew")(w"êK(w) & w'Rw")). R må derfor være seriell over K(w).

Vi må også vise at R er symmetrisk over K(w). Anta derfor for vilkårlige w',w" at (10) w',w"êK(w) og anta at (11) w' Rw". Siden w'êK(w) har vi at wR(n)w' for noe n>=0. *Tilfelle (i)*: n=0. da har vi w'=w og derfor i lys av (4) GRw'. Fra dette og (11) følger at w"Rw' siden R er betinget symmetrisk over K og derfor også over K(w). *Tilfelle (ii*): n>0. Da har vi at det må finnes a;1,....,a;n slik at wRa;1 & a;Ra;2 & .... & a;nRw'. Siden R er betinget symmetrisk over K(w) følger ved hjelp av (11) at w"Rw' også i dette tilfellet.

Man ser at R er symmetrisk og refleksiv over K(w). Det følger at M' er en Kripke -B-modell. På samme måte som under punkt (a) viser vi at (9) holder.

Anta nå for reduktio ad absurdum at B|-α. Fra gyldighetsteoremet for B følger da at α er holder i enhver Kripke B-modell. det følger derfor, siden M' er en B-modell, at <M',w> ⊨α siden wêK(w) har vi da i lys av (9) at <M,w> ⊨ α. Dette strider åpenbart mot (4). Det følger at ¬(B |- α).

Ad (c): Anta (1) ¬(DS4|-Lα). Vi skal vise at da kan heller ikke α være noe teorem i S4. Vi har nå vist at DS4 er fullstendig med hensyn på mengden av Kripke DS4-modeller. Det følger derfor fra (1) at det finnes en Kripke DS4-modell M=<φ,G,K,R> der vi har:

(2) <M,G> ⊨ ¬Lα. Fra dette følger enn mer at det finnes w der (3) wêK slik at (4) GRw & <M,w> ⊨ ¬α. Definer nå K(w) ved å sette:

(5) K(w) = Mg(w': w'êK & (En)(n>=0 & wR(n)w')

Vi betrakter så strukturen M' definert ved (6) M'=<φ',w,K(w),R> der φ' er definert ved:
(7) φ'(p) = φ(p) Ω K(w) om p er en utsagnsvariabel i L. Vi skal nå vise to ting:

(8) K(w) er en Kripke S4-modell

(9) (Aw')(w'êK(w) → (<M,w'> ⊨ α ↔ <M',w'> ⊨α)) for alle αêFm(L)

© Morten Harboe Rognes 2008

For å vise (8) er det nødvendig å vise at R er refleksiv og transitiv over K(w). Man viser at R er refleksiv over K(w) på nøyaktig samme måte som under (a). Siden M er en Kripke DS4-modell følger det at R er transitiv over K. Siden K(w) Inkl K følger det at R er transitiv over K(w). Vi kan derfor konkludere med at M' er en Kripke S4-modell. På samme måte som under punkt (a) viser vi at (9) holder.

Anta nå for reduktio ad absurdum at S4|-α. Fra gyldighetsteoremet for S4 følger da at α er holder i enhver Kripke S4-modell. det følger derfor, siden M' er en S4-modell, at <M',w> ⊨α siden wêK(w) har vi da i lys av (9) at <M,w> ⊨ α. Dette strider åpenbart mot (4). Det følger at ¬(S4 |- α).

Ad (d): Anta (1) ¬(DS5|-Lα). Vi skal vise at da kan heller ikke α være noe teorem i S4. Vi har nå vist at DS5 er fullstendig med hensyn på mengden av Kripke DS5-modeller. Det følger derfor fra (1) at det finnes en Kripke DS5-modell M=<φ,G,K,R> der vi har:

(2) <M,G> ⊨ ¬Lα. Fra dette følger enn mer at det finnes w der (3) wêK slik at (4) GRw & <M,w> ⊨ ¬α. Definer nå K(w) ved å sette:

(5) K(w) = Mg(w': w'êK & (En)(n>=0 & wR(n)w')

Vi betrakter så strukturen M' definert ved (6) M'=<φ',w,K(w),R> der φ' er definert ved:

(7) φ'(p) = φ(p) Ω K(w) om p er en utsagnsvariabel i L. Vi skal nå vise to ting:

(8) K(w) er en Kripke S5-modell

(9) (Aw')(w'êK(w) → (<M,w'> ⊨ α ↔ <M',w'> ⊨α)) for alle αêFm(L)

For å vise (8) er det nødvendig å vise at R er refleksiv, symmetrisk og transitiv over K(w). Man viser at R er refleksiv over K(w) på nøyaktig samme måte som under punkt (a). Man viser at R er symmetrisk over K(w) på nøyaktig samme måte som under punkt (b). Siden M er en Kripke DS5-modell følger det at R er transitiv over K. Siden K(w) Inkl K følger det at R er transitiv over K(w). Vi kan derfor konkludere med at M' er en Kripke S5-modell. På samme måte som under punkt (a) viser vi at (9) holder.

Anta nå for reduktio ad absurdum at S5|-α. Fra gyldighetsteoremet for S5 følger da at α er holder i enhver Kripke S4-modell. det følger derfor, siden M' er en S5-modell, at <M',w> ⊨α siden wêK(w) har vi da i lys av (9) at <M,w> ⊨ α. Dette strider åpenbart mot (4). Det følger at ¬(S5 |- α).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. QED.

© Morten Harboe Rognes 2008

Addendum 2008

Om intepretasjonen av alternativrelasjonen i Kripke-modeller for deontisk setningslogikk

© Morten Harboe Rognes 2008

I det følgende skal vi tenke oss at I representerer mengden av absolutt alle logisk mulige verdener. Dessuten tenker vi oss at G representerer den aktuelle verden, og at R er en relasjon over I som holder for et par <w,w'> hvis og bare hvis w' er tillatt med hensyn på w. Hanson[6] angir en annen litt mer eksplisitt tolkning av "w' er tillatt med hensyn på w", nemlig " Ethvert saksforhold beskrevet av et utsagn som er sant i w' er tillatt i w". Dette sier ikke mye, men det sier muligens litt mer. I det følgende vil vi med et utsagn forstå en hvilken som helst mengde med mulige verdener, det vil si enhver delmengde av I. Er u et eller annet utsagn er det sant i en logisk mulig verden w hvis og bare hvis wêu.

Har man nå Hansons tolkning av alternativrelasjonen R i tankene har vi ganske visst at (1) ¬(GRG). GRG innebærer jo at ethvert saksforhold beskrevet av et utsagn som er sant i den aktuelle verden er tillatt i i denne verden. Men det finnes talløse utsagn som beskriver drap, tyverier, mishandlig og voldtekter, utsagn som åpenbart er sanne i virkelighetens verden, men som under ingen omstendigheter beskriver saksforhold som er moralsk tillatt i denne verden. (1) uttrykker derfor en svært rimelig påstand.

Man kan imidlertid undres om det ikke burde være mulig å gi en litt mer utførlig analyse av alternativrelasjonen R, en analyse som kunne gi en mer informasjon om hvilke egenskaper denne relasjonen har. At denne relasjonen skulle være transitiv virker ikke direkte innlysende, heller ikke at den skulle være betinget refleksiv eller betinget symmetrisk.[7] Man skulle gjerne sett en definisjon av R som avgjorde disse og andre spørsmål.

Vi skal komme med noen forslag i denne forbindelse. Uttrykket "x er en morallov som gjelder i verdenen w" er ikke spesielt klart, men man kan i det minste gi noen eksempler som ikke virker totalt ubegrunnede. Man kunne nevne slike prinsipper som Kants kategoriske imperativ, eller Rawls frihetsprinsipp. Strengt tatt ville det ikke være så vanskelig å forlenge listen med andre potensielle kandidater.

La oss forkorte "x er en morallov som gjelder i verdenen w" med "L(x,w)". Vi lar L* betegne mengden av alle morallover. Vi setter L*=Mg(x: (Ew)(wêI & L(x,w))). Med andre ord er mengden av alle morallover, mengden av alle de x der det finnes en mulig verden w slik at x er en morallov i w. Det skulle være åpenbart at det følgende prinsipp er plausibelt om man anser L som et meningsfullt predikat:

(A1) (Aw)(L(x,w) → wêI) & GêI

Formelens første del uttrykker ikke noe annet enn at dersom x er en morallov som gjelder i verdenen w så er w en logisk mulig verden. Den andre delen sier at den aktuelle verden er en logisk mulig verden.

Anta a er en eller annen mengde med morallover. Det virker da ikke urimelig å tenke seg at visse utsagn beskriver saksforhold som følger fra det morallovene i a påbyr , mens andre utsagn beskriver saksforhold som ikke følger fra det moralovene i mengden a påbyr. Det virker altså som om predikatet "u er et utsagn som beskriver et forhold som følger fra det moralovene i mengden a påbyr" gir mening. Vi forkorter det med "C(x,a)". I lys av disse refleksjonene virker den følgende påstand rimelig:

(A2) (Au)(Aa)(C(u,a) → uêPt(I) & aêPt(L*))

Man bør huske på at vi identifiserer utsagn med mengder av mulige verdener. Pt(I), potensmengden til I, utgjør derfor mengden av alle utsagn. Aksepterer man at predikatene L og C gir mening synes (A2) å være en temmelig ukontroversiell påstand.

---

6 Se Hanson [1], side 180.

7 En relasjon R over K er betinget refleksiv over K hvis og bare hvis (Ax(Ay)(x,yêK → (xRy → yRy)). Den er betinget symmetrisk over K hvis og bare hvis (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêK →(xRy &yRz → zRy)).

© Morten Harboe Rognes 2008

La oss nå gå et skritt videre. Anta x er en morallov som gjelder i verdenen w. Er det da mulig at denne moralloven ikke gjelder i en annen verden w'? Gitt at Kants kategoriske imperativ faktisk er en morallov som gjelder i den aktuelle verden. Kan man likevel hevde at det finnes verdener der den ikke gjelder? Vi lar svaret stå åpent, men det er vanskelig å fri seg fra den tanke at et benektende svar ikke er uten enhver plausibilitet. Det virker ikke urimelig å si at dersom slike moralske prinsipper som Kants kategoriske imperativ, Rawls rettferdighetsprinsipper, eller andre svært generelle moralske normer, er sanne så er de nødvendig sanne. Med andre ord, gjelder de i én mulig verden, gjelder de i alle mulige verdener. Dette er bakgrunnen for at vi, i det minste forsøksvis, betrakter det følgende prinsipp:

(A3) $(Aw)(Aw')(w,w'\hat{e}I \rightarrow (Ax)(L(x,w) \leftrightarrow L(x,w')))$

Vi setter per definisjon $H(w) = Mg(x: L(x,w))$. $H(w)$ er altså mengden av alle de morallover som gjelder i w. Dessuten definerer vi, om w er en mulig verden, $C(w)$ ved:

$C(w) = SN(Mg(u: C(u, H(w)))$

Som man ser er $C(w)$ snittet, eller konjunksjonen, av alle de utsagn som beskriver saksforhold som følger fra det alle de morallovene som gjelder i verdenen w påbyr.

Det virker rimelig å kreve at det for enhver verden w må være mulig å tenke seg en verden w' der alle de morallovene som gjelder i w følges. Dette innebærer at dersom w er en mulig verden bør man kreve at $C(w)$ er ikke-tom. Det bør, med andre ord, finnes en verden w der alle de utsagnene som beskriver saksforhold som følger fra det morallovene i w påbyr er sanne. Den følgende setning uttrykker dette krav:

(A4) $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow C(w) \neq \emptyset)$

Vi har nå innført de begrepsdannelser vi trenger for å gi en definisjon av R. Denne definisjon er muligens mer opplysende enn den redegjørelse Hanson gir i sin artikkel. Definisjonen er denne:

D1 $R = Mg(<w,w'>: w,w'\hat{e}I \ \& \ w'\hat{e}C(w))$

Man kan vise at dersom denne definisjonen, sammen med antagelsene A1 - A4, som etter vår mening ikke er uten enhver plausibilitet, aksepteres, vil R være en relasjon som er seriell, betinget refleksiv, betinget symmetrisk, transitiv og evklidisk. Dette innebærer at strukturen $<a,I,R>$ oppfyller de krav som stilles til en Kripke DS5-struktur. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 1 Anta (A1) - (A4) holder. Da gjelder:

(i) $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Ew')(w'\hat{e}I \ \& \ wRw'))$
(ii) $(Aw)(Aw')(w,w'\hat{e}I \rightarrow (wRw' \rightarrow w'Rw'))$
(iii) $(Aw)(Aw')(Aw'')(w,w',w''\hat{e}I \rightarrow (wRw' \ \& \ w'Rw'' \rightarrow w''Rw'))$
(iv) $(Aw)(Aw')(Aw'')(w,w',w''\hat{e}I \rightarrow (wRw' \ \& \ w'Rw'' \rightarrow wRw''))$
(v) $(Aw)(Aw')(Aw'')(w,w',w''\hat{e}I \rightarrow (wRw' \ \& \ wRw'' \rightarrow w'Rw''))$

Bevis: Anta (A1) - (A4) holder. Da har vi ved hjelp av A3 og definisjonen av H at

© Morten Harboe Rognes 2008

(1) (Aw)(Aw')(w,w'êI → (H(w) = H(w'))). Fra dette og det forhold at C(w) = SN(Mg(u: C(u,H(w)))) følger åpenbart:

(2) (Aw)(Aw')(w,w'êI → (C(w)=C(w')))

Ad (i): Anta for vilkårlig w at (3) wêI. Da følger ved hjelp av A4 at det finnes w' slik at (4) w'êC(w) . Men C(w) Inkl I. Det følger at w,w'êI & w'êC(w). Herav kan vi slutte at wRw' og derfor at (Ew')(w'êI & wRw')). Dette viser at (i) holder.

Ad (ii): Anta (5) w,w'êI & wRw' for vilkårlige w,w'. Fra definisjonen av R følger da:
(6) w'êC(w). Fra (2) og C(w) = C(w'). Fra dette og (6) har vi w'êC(w'). Herav følger så ved hjelp av definisjonen av R at w'Rw'. Sien w,w' var vilkårlig elementer slik at (5) viser dette at (ii) holder.

Ad (iii) Anta for vilkårlige w,w',w" at (7) wRw' & w'Rw". Fra dette og definisjonen av R følger: (8) w'êC(w) og (9) w"êC(w'). Siden w,w',w"êI følger ved hjelp av (2) at
(10) C(w") = C(w') =C(w). Fra dette og (8) følger w'êC(w") og derfor at w"Rw'. Dette viser at (iii) holder.

Ad (iv) Anta for vilkårlige w,w',w" at (11) wRw' & w'Rw". Fra dette og definisjonen av R følger: (12) w'êC(w) og (13) w"êC(w'). Siden w,w'êI følger ved hjelp av (2) at
(14) C(w) =C(w"). Fra dette og (13) følger w'êC(w") og derfor at w"Rw'. Dette viser at (iii) holder.

Ad (v) Anta for vilkårlige w,w',w" at (15) wRw' & wRw". Fra dette og definisjonen av R følger: (16) w'êC(w) og (17) w"êC(w). Siden w',w"êI følger ved hjelp av (2) at
(12) C(w') =C(w). Fra dette og (12) følger w"êC(w') og derfor at w'Rw". Dette viser at (iii) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

På grunnlag av definisjonen D1 og antagelsene A1 - A4 kan vi bevise mer enn bare Teorem 1. Man kan også vise:

Teorem 2 Anta A1-A4 holder. Da gjelder:
(i) (E!x)(xêPt(I) & (Aw)(wêI → C(w) =x))
(ii) wêI →(Aw')(Aw")(w',w"êC(w) → w'Rw")
(iii) wêI → w'ê(I-C(w)) → ¬(w'Rw'))
(iv) wêI → w'ê(I-C(w) & w"êC(w) → ¬(w"Rw')

Bevis: *Ad (i)*: Vi har at GêI i henhold til A1. Fra dette følger at C(G) Inkl I. Sett per definisjon (1) x=C(G). Da følger umiddelbart at (2) xêPt(I). Anta for vilkårlig w at wêI. Siden GêI følger ved hjelp av A4, slik som demonstrert i det forrige beviset, at C(w) = C(G). Fra dette og (1) følger åpenbart C(w)=x. Siden w var vilkårlig har vi vist (Aw)(wêI → C(w)=x). Sammen med (2) gir dette en: (3) xêPt(I) & (Aw)(wêI → C(w) =x). Anta at det finnes noe y slik at (4) yêPt(I) & (Aw)(wêI → C(w) =y). Siden GêI har vi fra (3) at C(G)=x og tilsvarende fra (4) at C(G)=y. Det følger at x=y. Vi har derfor
(E!x)(xêPt(I) & (Aw)(wêI → C(w) =x)). Dette viser at punkt (i) holder.

Ad (ii): Anta (1) wêI og dessuten at (2) w',w"êC(w) for vilkårlige w',w". Da har vi siden C(w) Inkl I at (3) w',w"êI og derfor ved hjelp av A4 at (4) C(w')=C(w"). Siden wêI har vi også ved hjelp av (3) og A4 at (5) C(w) = C(w'). Fra (2), (4) og (5) følger w"êC(w'). herav har vi så ved hjelp av definisjonen av R at w'Rw". Dette viser at (ii) holder.

Ad (iii): Dette er nokså opplagt. Anta (1) wêI & w'ê(I-C(w)). Anta for reduktio ad

© Morten Harboe Rognes 2008

absurdum at w'Rw'. Ved hjelp av definisjonen av R følger da w'êC(w'). Siden w,w'êI har vi C(w)=C(w') og derfor w'êC(w). Dette strider mot den andre konjunkten i (1).

Ad (iv): Anta (1) wêI & w'ê(I -C(w)) & w"êC(w). Anta dessuten for reduktio ad absurdum at (2) w'Rw". Fra (2) og definisjonen av R følger (3) w'êC(w"). Men C(w) Inkl I. det følger at w"êI og derfor, siden wêI at C(w")=C(w). Fra dette og (3) følger w'êC(w) som strider mot dn andre konjunkten i (1). Dette avslutter bevist. **QED.**

Man ser tydelig fra de resultatene som er presentert ovenfor at dersom man aksepterer antagelsene A1 - A4, og forøvrig de definisjonene vi har gitt, kan man vise at <a,I,R> er en Kripke DS5-modellstruktur. Gitt disse antagelsene må derfor DS5 fremstå som det mest korrekte system for deontisk setningslogikk av dem vi har betraktet. Dette innebærer at de andre systemene vi har undersøkt bare kan oppfattes som aksiomatiseringer av fragmenter av DS5, siden de alle er svakere enn dette system.

Fra Teorem 2 fremgår det at vi kan definere DS5-strukturer på en litt annen måte en vi har gjort i §10. I stedet for den definisjonen vi ga i §10 kan man bruke:

Definisjon 1: En Kripke DS5*-struktur er et triple <G,K,O> der K er en ikke-tom mengde, GêK og O er en ikke-tom mengde som er inkludert i K

Man kan så definere hva som menes med en verditilordning φ assosiert med en DS5*-struktur <G,K,O> på den måten vi har gjort tidligere, nemlig som en funksjon som tilordner enhver setningsvariabel i L en delmengde av K. En Kripke DS5*-modell er så et tuple <φ,G,K,O> der <G,K,O> er en DS5*-struktur. Man må imdlertid definere "<M,w> ⊨ α" på en lite annen måte enn i Definisjon 10.2.4. Valuasjonsregelen for formler av typen Lα i denne definisjonen må erstattes med:

$$\langle M,w\rangle \models L\alpha \leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}O \rightarrow \langle M,w\rangle \models \alpha)$$

Dernest defineres gyldighet som før. En formel α er DS5*-gyldig hvis og bare hvis man har for enhver Kripke DS5*-modell M= <φ,G,K,O> , at <M,G> ⊨ α. Det skulle da være en temmelig enkel sak å vise at en formel α i L er Kripke DS5*-gyldig hvis og bare hvis den er Kripke DS5-gyldig.

Uttrykket "x er en morallov som gjelder i verdenen w" er selvfølgelig uklart. Men etter vår oppfatning er morallover intet annet en gyldige etiske normer. Man kan konsultere Rognes [2] angående et forsøk på å bygge opp en systematisk teori om generelle etiske normer. Dette arbeidet skulle kunne sette den analysen av alternativrelasjonen R som vi har formulert her inn i et videre perspektiv.

© Morten Harboe Rognes 2008

Referanser

Hanson [1]	Hanson, W.H., 1965, "Semantics for Deontic Logic", *Logique et nalyse*, Vol 8, pp. 177 - 190
Hintikka [1]	Hintikka, J.,1969, *Models for modalities*, Dordrecht Holland, D. Reidel Publishing Company
Hughes & Cresswell [1]	Hughes,G.E og Cresswell, M.J., 1968, *An Introduction to Modal Logic*, London, Methuen and Co Ltd
Kripke [1]	Kripke, S.A., 1963, "Semantical analysis of modal logic I, normal propositional calculi", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*", Vol 9, pp. 67 - 96
Rognes [1]	Rognes, M.H., 1971, *Halvsyntaktiske modeller og normale modale setningslogiske systemer*, Upublisert manuskript.
Rognes [2]	Rognes, M.H., 1990, *En generell teori om etiske normer,* Upublisert manuskript.

© Morten Harboe Rognes 2008